

ICAB Force/CR

L'application des règles de calcul de ruine
(Constructions Métalliques, Charpentes en Bois)
manuel de référence

Généralités	3
<i>Critères DTU</i>	3
<i>Critères étendus</i>	3
Notations	4
Loi de comportement élastique	5
1 Théorie des poutres	7
1.1 <i>Définition des déformations dans des poutres</i>	7
1.2 <i>Efforts résultants dans les poutres</i>	8
1.3 <i>Rigidités</i>	10
1.3.1 <i>Facteurs de correction des rigidités associées au cisaillement transverse</i>	11
1.3.2 <i>Evaluation des contraintes de cisaillement transverse</i>	12
1.3.3 <i>Evaluation des contraintes de torsion</i>	13
1.4 <i>Formulation utilisée dans ICAB Force</i>	14
1.5 <i>Précontraintes</i>	17
1.6 <i>Pression dans les tubes</i>	18
2 Contraintes limites	18
2.1 <i>Contraintes maximales</i>	19
2.2.1 <i>Traction/compression</i>	20
2.3.2 <i>Cisaillement</i>	20
2.4.3 <i>Critère de Von Mises</i>	21
2.5.4 <i>Critère de Tsai-Wu</i>	21
3 Instabilités	23
3.1 <i>Flambement généralisé</i>	23
3.1.1 <i>Longueurs de flambement</i>	24
3.2 <i>Flambement par compression</i>	24
3.3 <i>Déversement et flambement</i>	25
4 Critères d'instabilité CM66 – constructions en acier	25
4.1 <i>Flambement par compression simple CM66</i>	25
4.3 <i>Déversement réglementaire CM66</i>	26
4.4 <i>Voilement</i>	27
4.5 <i>Additif 80</i>	28
4.6 <i>Critère sur la flèche</i>	29
4.7 <i>Critère étendus CM66 B-D</i>	29
Critères d'instabilité P22-703 – parois minces en acier	30

Critères d'instabilité CB71 – charpentes en bois	32
<i>Flambement par compression simple CB71</i>	32
<i>F_{cb71, B} : Compression et flexion CB71</i>	32
Critères AL76 – constructions en aluminium	33
B : Flambement AL76	33
D : Déversement AL76	34
Critères Eurocode 3 – partie 1-1	35
Annexe A: propriétés de sections de poutres homogènes	37
Annexe B: analyse modale, fréquences propres, flambement	42

ICAB Force/CR

L'application des règles de calcul de ruine

Généralités

L'objet de ce manuel de référence est de présenter les méthodes de calcul employées dans les applications ICAB Force (avec ou sans optimisation). Ce manuel comprend trois chapitres. Le premier présente brièvement la théorie des poutres utilisée dans les calculs par ICAB Force. Le deuxième et le troisième chapitres présentent les critères de ruine relatifs à l'état de contrainte et aux instabilités telles que le flambement, le déversement et le voile.

Critères DTU

Les règles appliquées par ICAB Force sont les règles DTU CM66 et CB71.

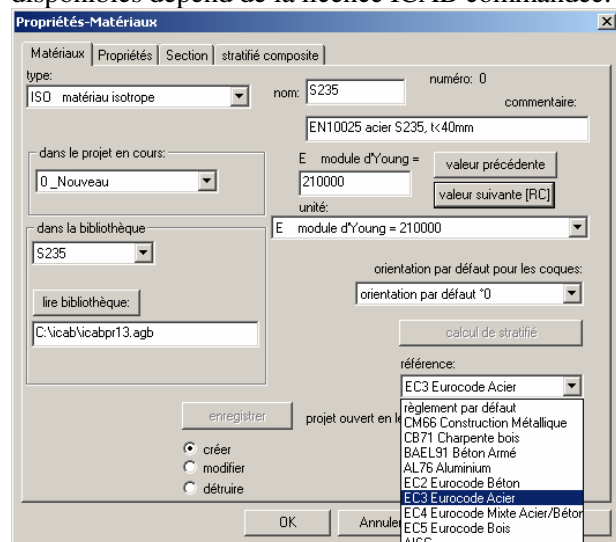
NB. Les règles CM66 sont appliquées pour les poutres constituées d'un matériau isotrope (ISO) pour lequel la limite élastique est définie. Les règles CB71 sont appliquées pour les poutres constituées d'un matériau orthotrope (ORTHO).

Les critères DTU sont :

S_c	<i>critère de contrainte axiale (CM66, CB71)</i>
T_c	<i>contrainte de cisaillement/(0.65 σ_0), (CM66)</i>
M_c	<i>critère de Mises (ou Tsai-Wu)</i>
F_{cm66}	<i>flambement simple (CM66 ou CB71)</i>
D_{cm66}	<i>flambement avec déversement (CM66)</i>
V_{cm66}	<i>voile CM66 pour profil en I (CM66)</i>

Critères étendus

Le règlement par défaut qui peut être indiqué pour chaque matériau permet à l'utilisateur de choisir la norme applicable pour la vérification de la ruine du matériau. Le choix des options des normes disponibles dépend de la licence ICAB commandée.



Les critères de ruine calculés sont :

- S_{Fy} *rapport de la contrainte de Von Mises sur la limite élastique*
- B *critère de flambement calculé en fonction de la norme applicable pour le matériau*
- D *critère de déversement calculé en fonction de la norme applicable pour le matériau*

Ces critères sont appelés « critères de ruine étendus ».

Notations

Dans ce manuel, les notations employées ne sont pas explicitées à chaque occurrence de manière à ne pas surcharger le texte. Si vous cherchez la signification d'une notation, vous trouverez la réponse la liste ci-dessous.

Les unités indiquées sont exprimées dans le Système International. L'unité de longueur est le mètre (m), l'unité de masse est le kilogramme (kg), l'unité de temps est la seconde (s), l'unité de température est le Kelvin (0K = -273 degrés centigrades) et l'unité de force qui en résulte est le Newton ($N=kg.m.s^{-2}$).

Caractéristiques mécaniques

E	module d'élasticité longitudinale ou module d'Young. (E, Pa=N/m ²)
G	module de cisaillement, $G = E/(1+\nu)/2$ (Pa=N/m ²)
ν	coefficient de Poisson (NU)
N_x	effort de traction ou compression (N)
T_y	effort tranchant dans la direction (y), (N)
M_x	moment de torsion (N.m)
M_y	moment fléchissant autour de l'axe (y), (N.m)
σ	contrainte normale dans une section (Pa=N/m ²)
σ_e	contrainte limite d'élasticité (Pa=N/m ²)
σ_K	contrainte critique d'Euler $\sigma_K = \lambda^2 E / I^2$ (Pa)
σ_{N_x}	contrainte de traction/compression associée à N_x (Pa=N/m ²)
σ_{f_y}	contrainte de traction/compression associée à M_y (Pa=N/m ²)
τ	contrainte de cisaillement dans une section (Pa=N/m ²)
τ_y	contrainte de cisaillement associée à T_y (Pa=N/m ²)
τ_T	contrainte de cisaillement associée à M_x (Pa=N/m ²)

Caractéristiques géométriques

A	section de poutre, <i>parfois notée S</i> (AR, m ²)
A_y	section réduite pour le calcul de cisaillement $t_y = T_y/A_y$ (ARY, m ²)
A_z	section réduite pour le calcul de cisaillement $t_z = T_z/A_z$ (ARZ, m ²)
t_w, e_a	épaisseur d'une âme de poutre, coefficient utilisé pour le voilement (EA, m)
t_f	épaisseur de l'aile pour les profils I, H, U.
h_z	hauteur de la poutre, distance maximale entre fibres extrêmes (m)
i	rayon de giration, $i = \sqrt{I/A}$, (m).
I_{yy}	moment d'inertie d'une section pour une flexion autour de l'axe (y). (IYY, m ⁴)
I_{zz}	moment d'inertie d'une section pour une flexion autour de l'axe (z). (IZZ, m ⁴)
I_{vv}	plus faible moment d'inertie dans le repère principal d'inertie
(I/v)	modules d'inertie d'une section pour les fibres extrêmes (IVY, IVZ, m ³)
S	moment statique (SP, m ³)

Coefficients et grandeurs sans dimension

B	coefficient caractéristique du niveau d'application des charges (déversement CM66)
C	coefficient caractéristique de la répartition longitudinale des charges (déversement CM66)
D	coefficient caractéristique des dimensions de la pièce (déversement CM66)
k_1	coefficient d'amplification des contraintes de compression (CM66)
k_d	coefficient de déversement (CM66)
k_{D80}	coefficient de déversement (additif 80)
k_f	coefficient d'amplification des contraintes de flexion (CM66)
k_{f80}	coefficient d'amplification des contraintes de flexion (additif 80)
l	élancement ($l=l_k/i$)
l_k	longueur de flambement maximale
l_{ky}	longueur de flambement dans le plan (XoZ) concernant l'inertie I_{yy}
l_{kz}	longueur de flambement dans le plan (XoY) concernant l'inertie I_{zz}
l_D	longueur de déversement maximale
l_{Dy}	longueur de déversement dans le plan (XoZ)
l_{Dz}	longueur de déversement dans le plan (XoY)
L_{KM}	longueur minimale de flambement simple
L_{DM}	longueur minimale de déversement

Conventions

U,x dérivée première de la grandeur U par rapport à la variable x (dU/dx).

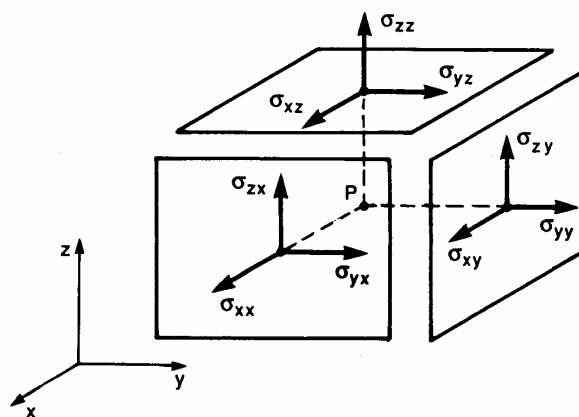
U,xx dérivée seconde de la grandeur U par rapport à la variable x (d^2U/dx^2).

Loi de comportement élastique

Un tenseur de contrainte symétrique quelconque comprend 6 composantes $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}, \tau_{zy} = \tau_{yz} \quad (1)$$



Composantes du tenseur $[\sigma]$

Les relations entre les déformations et les contraintes pour des matériaux élastiques orthotropes sont les suivantes:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{xx}} & -\nu_{yx} & -\nu_{zx} \\ -\nu_{xy} & \frac{1}{E_{yy}} & -\nu_{zy} \\ -\nu_{xz} & -\nu_{yz} & \frac{1}{E_{zz}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\frac{\nu_{ij}}{E_{ii}} = \frac{\nu_{ji}}{E_{jj}}, \quad \varepsilon_{ii} = \frac{\partial X_i}{\partial x_i}, \quad \gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G_{ij}}, \quad \gamma_{ij} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} + \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$$

Dans une poutre, le repère d'orthotropie du matériau (e_x, e_y, e_z) parfois noté (e_1, e_2, e_3) correspond au repère local de cette poutre. Pour un matériau élastique isotrope, les relations se simplifient ainsi:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad \gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial X_i}{\partial x_i}, \quad \gamma_{ij} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} + \frac{\partial X_i}{\partial x_j}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3)$$

Exemple pour l'acier: $E= 210$ GPa, $\nu= 0.3$ ($G \approx 81$ GPa).

Mise en évidence expérimentale

E: le module d'Young ou module d'élasticité uniaxiale est le rapport contrainte axiale/ déformation uniaxiale.

ν : le coefficient de Poisson caractérise la striction du matériau lors d'une traction uniaxiale, c'est-à-dire le rapport déformée perpendiculaire à la direction de traction par la déformée dans le sens de traction lors d'un effort de traction uni-axial.

G: le module de cisaillement est le rapport contrainte de cisaillement par le taux de cisaillement lors d'une sollicitation au cisaillement pur.

K: le module de compression hydrostatique est le rapport de la contrainte hydrostatique par la diminution de volume lors d'une mise sous pression hydrostatique

$$\sigma = \sigma_{xx} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_{xx}}, \quad \nu = -\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}}$$

$$\tau = \sigma_{xy} \Rightarrow G = \frac{\tau}{\gamma_{xy}} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4)$$

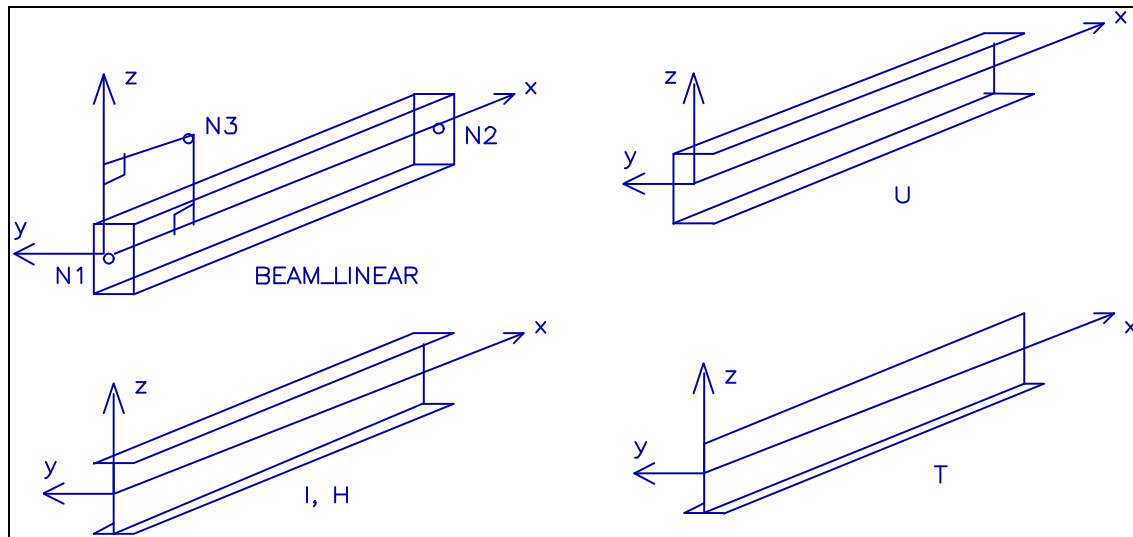
$$\sigma_h = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} \Rightarrow K = \frac{\sigma_h}{\varepsilon_v} = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad \varepsilon_v = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

1 Théorie des poutres

Ce chapitre résume brièvement les hypothèses et les théorèmes utilisés en résistance des matériaux pour la modélisation de structures utilisant des poutres.

En termes non mathématiques, une poutre est un solide élancé dont une dimension, la longueur, est très supérieure aux deux autres. Cette particularité permet de simplifier l'étude mécanique d'une poutre par rapport à celle d'un corps solide quelconque. La section d'une poutre est défini par le plan perpendiculaire à la direction de l'élanement.

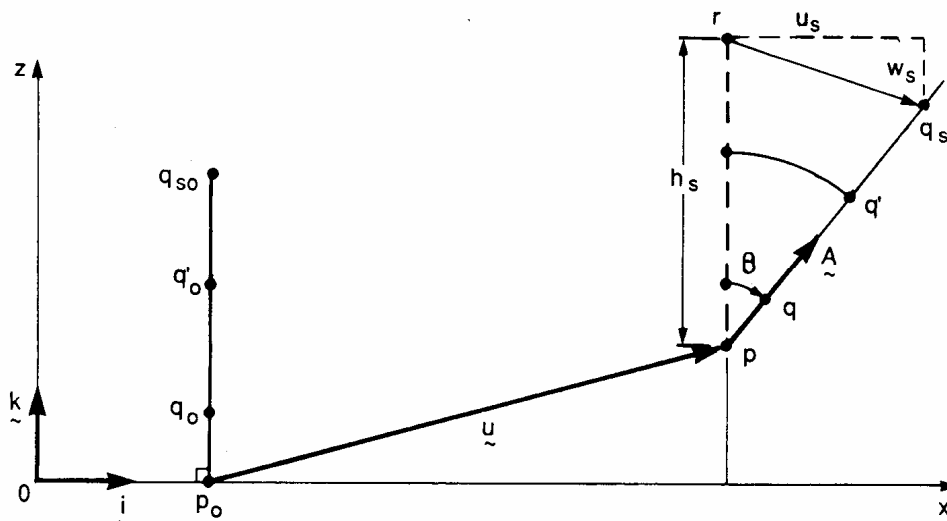
1.1 Définition des déformations dans des poutres



Dans le repère local de la poutre, nous notons (x) la direction axiale et (y,z) les directions définissant les deux axes de la section de la poutre. Par convention, l'axe (z) correspond à la direction définissant la plus forte inertie. Ainsi pour une poutre en I, l'axe (z) sera l'axe parallèle à l'âme, l'axe (y) sera parallèle aux semelles.

1^{ère} hypothèse fondamentale: sections droites

Quels que soient les sollicitations appliquées à une poutre, la section reste plane et son aire est constante.



Il est donc possible de définir le déplacement d'un point quelconque d'une section à partir de trois déplacements (u, w_y, w_z) et trois rotations $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$.

Les déplacements u, w_y et w_z sont les translations du point de la section sur l'axe (x) local de la poutre. La valeur q_x (respectivement q_y, q_z) est la rotation de la section autour de l'axe x (respectivement y, z) local de la poutre.

Les déplacements (U_x, U_y, U_z) dans le repère local de la poutre pour un point de la section situé aux coordonnées $\langle r \rangle = (x, y, z)$ sont au premier ordre ($\cos(\theta) = 1 + o(\theta^2) \approx 1$, $\sin(\theta) = \theta + o(\theta^3) \approx \theta$):

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} u \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} + \vec{r} (\cos \theta - 1) + \sin \theta r \frac{\vec{\theta}_x \vec{r}}{|\vec{\theta}_x \vec{r}|} \approx \begin{bmatrix} u \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} + \vec{\theta}_x \vec{r}$$

$$U_x(x, y, z) \approx u(x) - y \theta_z(x) + z \theta_y(x)$$

$$U_y(x, y, z) \approx w_y(x) - z \theta_x(x)$$

$$U_z(x, y, z) \approx w_z(x) + y \theta_x(x) \quad (5)$$

Les déformations sont:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial \theta_z}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = e - y \chi_z + z \chi_y$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial U_y}{\partial y} = 0$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} = -\theta_z + \frac{\partial w_y}{\partial x} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \gamma_y - z \frac{\partial \theta_x}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} = \theta_y + \frac{\partial w_z}{\partial x} + y \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \gamma_z + y \frac{\partial \theta_x}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

Avec:

$$e = u_{,x} \quad \text{déformation de membrane}$$

$$\chi_y = \theta_{y,x} \quad \text{courbure due à la rotation autour de l'axe y}$$

$$\chi_z = \theta_{z,x} \quad \text{courbure due à la rotation autour de l'axe z}$$

$$\gamma_y = -\theta_z + w_{y,x} \quad \text{déformation due au cisaillement transverse y}$$

$$\gamma_z = \theta_y + w_{z,x} \quad \text{déformation due au cisaillement transverse z}$$

Nous adoptons la notation $U_{,x}$ pour désigner la dérivée première de la grandeur U par rapport à la variable x .

1.2 Efforts résultants dans les poutres

Les hypothèses de modélisation des poutres simplifient le tenseur des contraintes.

2ème hypothèse fondamentale: contraintes planes

Les hypothèses de modélisation des poutres font l'assertion que les contraintes de striction sont nulles $\mathbf{s}_{yy} = \mathbf{s}_{zz} = \mathbf{0}$, ainsi que la contrainte de cisaillement $\mathbf{t}_{yz} = \mathbf{0}$. Il s'agit de l'hypothèse des contraintes planes dans l'épaisseur de la poutre. Notez que la théorie des poutres pose la double hypothèse des contraintes planes et des déformations planes (induites par l'hypothèse des sections droites $e_{yy} = e_{zz} = \gamma_{yz} = 0$). Ces hypothèses ne sont pas compatibles simultanément: il s'agit d'approximations.

La contrainte normale s_{xx} est souvent simplement notée s . Les efforts résultants sont l'effort normal N_x , les efforts tranchants T_y , T_z , le moment de torsion M_x et les moments fléchissants M_y , M_z à partir de l'intégration surfacique des contraintes sur une section à une abscisse (x) donnée.

$$\vec{N} = \begin{bmatrix} N_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} = \iint_A [\sigma] \vec{n}_x dA, \quad \vec{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \iint_A \vec{om}_x [\sigma] \vec{n}_x dA \quad (7)$$

Soit encore:

$$\begin{aligned} N_x &= \iint_A \sigma_{xx} dA \\ T_y &= \iint_A \tau_{xy} dA \\ T_z &= \iint_A \tau_{xz} dA \\ M_x &= \iint_A (y \tau_{xz} - z \tau_{xy}) dA \\ M_y &= \iint_A z \sigma_{xx} dA \\ M_z &= \iint_A -y \sigma_{xx} dA \end{aligned} \quad (8)$$

Equations d'équilibre

Les équations d'équilibre de mécanique des milieux continus sont, pour un volume V de densité ρ en accélération $\{a\}$ soumis à un état de contrainte $[s]$ subissant des forces externes volumiques $\{f_v\}$ et surfaciques $\{f_s\}$:

$$\begin{aligned} \text{div}[\sigma] + \{f_v\} &= \rho\{a\}, V \\ [\sigma]\{n\} &= \{f_s\}, S \\ \sigma_{yy} = \sigma_{xx} = \tau_{yz} &= 0 \\ &\Rightarrow \\ \sigma_{xx,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} + f_{vx} &= \rho a_x \\ \tau_{yx,x} + f_{vy} &= \rho a_y \\ \tau_{zx,x} + f_{vz} &= \rho a_z \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z &= f_{sx}, (A_{,x} = 0 \Rightarrow n_x = 0) \\ \sigma_{yx} n_x &= f_{sy} \\ \sigma_{zx} n_x &= f_{sz} \end{aligned}$$

Pour une analyse statique, les forces volumiques d'accélération sont nulles ($\{a\}=0$). Pour une poutre, les contraintes s_{yy} , s_{zz} , t_{yz} sont nulles. En intégrant ces relations d'équilibre sur une section A , l'équilibre des forces et des moments pour une section de la poutre s'écrit:

$$\begin{aligned} N_{,x} + f_x &= 0 \\ T_{y,x} + f_y &= 0 \\ T_{z,x} + f_z &= 0 \\ M_{x,x} + m_x &= 0 \\ M_{y,x} - T_z + m_y &= 0 \\ M_{z,x} + T_y + m_z &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Les forces et moments linéiques qui résultant des forces externes volumiques et surfaciques sont notés $f_x, f_y, f_z, m_x, m_y, m_z$ (les moments linéiques seront supposés nuls dans la suite de ce manuel):

$$\begin{aligned} f_x &= \int_A f_{vx} dA + \int_{\partial A} f_{sx} ds \\ f_y &= \int \int_A f_{vy} dA + \int_{\partial A} f_{sy} ds, \quad f_z = \int \int_A f_{vz} dA + \int_{\partial A} f_{sz} ds \\ m_x &= \int \int_A (y f_{fyz} - z f_{fyx}) dA + \int_{\partial A} (y f_{sz} - z f_{sy}) ds \\ m_y &= \int \int_A z f_{vy} dA + \int_{\partial A} z f_{sz} ds, \quad m_z = - \int \int_A y f_{vx} dA - \int_{\partial A} y f_{sx} ds \end{aligned} \quad (11)$$

Dans ICAB Force, les forces externes linéiques sont créées par la gravitation et les charges réparties.

1.3 Rigidités

Si la poutre est constituée d'un matériau élastique, alors les relations entre les contraintes et les déformations sont:

$$\begin{aligned} s_{xx} &= E_x e_{xx} & E_x \text{ est le module d'Young dans la direction } x \text{ de la poutre} \\ t_{xy} &= G_{xy} \gamma_{xy} & G_{xy} \text{ est le module de cisaillement } xy \\ t_{xz} &= G_{xz} \gamma_{xz} & G_{xz} \text{ est le module de cisaillement } xz \end{aligned}$$

Si le matériau est isotrope alors $G_{xy} = G_{xz} = G = E/(2+2u)$ où u est le coefficient de Poisson.

En intégrant les relations entre contraintes et déformations sur l'aire de la section de la poutre, nous obtenons:

$$\begin{aligned} N_x &= H_m e + H_{mfy} \chi_y - H_{mfz} \chi_z \\ T_y &= H_{cy} \gamma_y - H_{cty} \beta_{x,x} \\ T_z &= H_{cz} \gamma_z + H_{ctz} \beta_{x,x} \\ M_x &= H_t \beta_{x,x} + H_{ctz} \gamma_z - H_{cty} \gamma_y \\ M_y &= H_{fy} \chi_y - H_{fyz} \chi_z + H_{mfy} e \\ M_z &= H_{fz} \chi_z - H_{fyz} \chi_y - H_{mfz} e \end{aligned} \quad (12)$$

Les grandeurs associées au module d'Young sont:

$$\begin{aligned} H_m & \text{ rigidité de membrane} \\ H_{mfy}, H_{mfz} & \text{ rigidités de couplage membrane/flexion} \\ H_{fy}, H_{fz}, H_{fyz} & \text{ rigidités de flexion} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_m &= \int \int_A E ds \\ H_{mfy} &= \int \int_A E z ds \\ H_{mfz} &= \int \int_A E y ds \\ H_{fy} &= \int \int_A E z^2 ds \\ H_{fz} &= \int \int_A E y^2 ds \\ H_{fyz} &= \int \int_A E y z ds \end{aligned} \quad (13)$$

Les grandeurs associées aux modules de cisaillement sont:

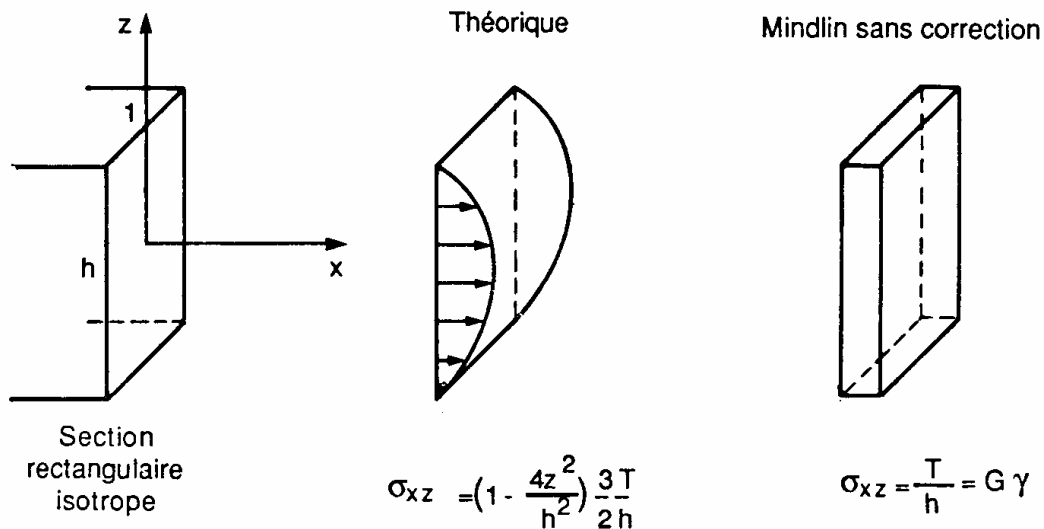
$$\begin{aligned} H_{cy}, H_{cz} & \text{ rigidités de cisaillement transverse} \\ H_{cty}, H_{ctz} & \text{ rigidités de couplage cisaillement/torsion} \\ H_t & \text{ rigidité de torsion} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{cy}^* &= \iint_A G_{xy} ds, & H_{cy} &= \frac{H_{cy}^*}{sr_y} \\
 H_{cz}^* &= \iint_A G_{xz} ds, & H_{cz} &= \frac{H_{cz}^*}{sr_z} \\
 H_{cty}^* &= \iint_A G_{xy} z ds \\
 H_{ctz}^* &= \iint_A G_{xz} y ds \\
 H_t^* &= \iint_A (G_{xz} y^2 + G_{xy} z^2) ds
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

H_t^* est la rigidité de torsion pour une section non soumise à un gauchissement, par exemple pour un tube circulaire.

1.3.1 Facteurs de correction des rigidités associées au cisaillement transverse

Les rigidités marquées d'une étoile dans les intégrales ci-dessus sont calculées directement à partir de la première hypothèse fondamentale (sections droites, cf équation⁽¹⁾). Mais cette hypothèse n'est pas compatible avec les équations d'équilibre que doivent satisfaire les contraintes. En effet, la cinématique simplifiée des sections de poutres impliquent que les déformations de cisaillement transverse γ_y et γ_z soient constantes à travers l'épaisseur. Dans ce cas, les contraintes de cisaillement ne peuvent être nulles sur la peau extérieure de la poutre. Or, pour une poutre réelle, ces contraintes sont nulles ($[s].\mathbf{n} = 0$, pour tout vecteur \mathbf{n} normal à la peau extérieure).



CONTRAINTES DE CISAILEMENT TRANSVERSE

Les coefficients H_{cy}^* et H_{cz}^* majorent les rigidités réelles de cisaillement transverse. Les coefficients sans dimension sr_y et sr_z introduisent des corrections sur les rigidités de cisaillement transverse. Le coefficient de Reissner $k=1/sr$ est défini de façon à ce que l'énergie interne U_1 de déformation de cisaillement transverse associée à la distribution exacte de t exacte et l'énergie U_2 associée au modèle simplifié

$$U_1 = \frac{1}{2} \iint_A \left(\frac{\tau_{xy}^2}{G_{xy}} + \frac{\tau_{xz}^2}{G_{xz}} \right) ds = U_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{T_y^2}{H_{cy}^* sr_y} + \frac{T_z^2}{H_{cz}^* sr_z} \right)$$

identiques:

$$\tag{15}$$

Voici quelques exemples de valeurs des coefficients correctifs de rigidité sr (Shear area Ratio) définis comme ci-dessus:

section pleine rectangulaire	6/5
section circulaire	7/6
tube circulaire	2
tube carré	2.4

Négliger l'effet des cisaillements transverses revient à prendre $sr_y=sr_z=0$ (formulation de Kirchhoff, par opposition à la formulation de Timoshenko qui prend en compte les cisaillements transverses). A partir de considérations dynamiques (identification de k à partir de l'expression d'une fréquence propre fondamentale) le coefficient dit de Mindlin est $k=\pi^2/12=1/1.216$. L'effet des cisaillements transverses est d'autant plus faible que la longueur de la poutre (L) est grande par rapport au rayon de giration (i). Dans le cas d'une poutre de longueur L , de section rectangulaire de hauteur h constituée d'un matériau homogène, le coefficient f qui caractérise l'influence des déformations de cisaillement transversal tend vers zéro en $(h/L)^2$:

$$\phi_z = \frac{12}{L^2} \frac{EI_{yy}}{GA} sr_z = 12 \frac{E}{G} \left(\frac{i_y}{L} \right)^2 sr_z = \frac{E}{G} \left(\frac{h_z}{L} \right)^2 sr_z$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_{yy}}{A}}$$

Une correction également fondée sur des considérations énergétiques peut être menée pour la rigidité de torsion. La correction tient compte du gauchissement de la section sous l'effet de la torsion. Le coefficient H_t^* majore la rigidité de torsion réelle H_t .

Exemple d'assouplissement introduit par le facteur de correction sr .

Soit une poutre de longueur L rotulée à ses extrémités et soumise à une charge linéique uniforme p (cf Timoshenko I, p. 166). La flèche au centre est:

$$w_z = \frac{5}{384} \frac{p L^4}{E I_{yy}} + \frac{p L^2}{8GA} sr_z$$

Pour $sr_z=0$, nous retrouvons l'expression de la flèche de la poutre élancée. Lorsque le coefficient sr_z est non nul, la flèche est plus importante: la prise en compte des effets du cisaillement transverse avec le coefficient sr_z permet d'éviter le blocage en cisaillement des poutres courtes.

Pour une poutre horizontale en porte-à-faux soumise à son extrémité à une force verticale, la flèche comporte encore un terme linéaire en L associé au cisaillement et un terme cubique associé à la flexion:

$$w_z = F \frac{sr_z L}{GA} + F \frac{L^3}{3E I_{yy}}$$

N.B. Un cisaillement constant pur ne peut engendrer qu'une flèche variant linéairement, alors qu'une flexion constante pure crée une courbure et donc une flèche variant au moins de façon quadratique mais sans terme linéaire.

Les formules des deux exemples ci-dessus sont établies pour des poutres dont les axes locaux sont principaux et passent par l'axe neutre.

1.3.2 Evaluation des contraintes de cisaillement transverse

Comme indiqué ci-dessus, l'hypothèse des sections droites implique des déformations de cisaillement transverse γ_{xy} , γ_{xz} constantes à travers l'épaisseur. En conséquence, les contraintes de cisaillement t_{xy} , t_{xz} ne respectent pas les conditions aux limites sur les faces supérieures et inférieures, ainsi que les équations locales d'équilibre dans la direction x de l'axe de la poutre.

Prenons une poutre soumise à une flexion autour de l'axe y exclusivement et non soumise à une force volumique. Nous conservons l'hypothèse des sections droites pour le calcul des déformations axiales (linéaires selon z). Pour déterminer la répartition des contraintes de cisaillement transverse, reprenons les équations d'équilibre statique:

$$\sigma_{xx,x} + \tau_{xz,z} = 0, \quad \tau_{xz}(z=\pm h/2) = 0$$

$$\sigma_{xx}(z) = z \frac{M_y}{I_{yy}}$$

$$\sigma_{xx,x} = z \frac{M_{y,x}}{I_{yy}} = -z \frac{T_z}{I_{yy}}$$

$$\Rightarrow \tau_{xz}(z) = \frac{T_z}{I_{yy} b} \int_{y=b/2}^b 2 \int_{z=z}^{h/2} z dz dy, \quad \tau_{xz(\max)} = \frac{T_z}{A_z}$$

$$\frac{I}{A_z} = \frac{S_{yy}}{I_{yy} b_{y=0}}, \quad S_{yy} = \int_{z=0}^{h/2} z dz dy, \quad I_{yy} = \int_{y=b/2}^b 2 \int_{z=-h/2}^{h/2} z^2 dy dz$$

L'aire cisailée A_z fait intervenir le moment statique S_{yy} , le moment d'inertie I_{yy} et la largeur de la section b (cf CM66 3,31 ou Timoshenko I, p 112). Par exemple, pour une section rectangulaire dont l'aire est $A = b.h$, on tire $t_{xz(\max)} = 3/2 T_z/A$. La distribution de contrainte de cisaillement t_{xz} est parabolique dans l'épaisseur.

L'expression de la contrainte maximale de cisaillement transverse peut s'écrire $t_{xz(\max)} = T_z/A_z$. Cet état de contrainte est atteint sur la fibre neutre pour des poutre symétriques. Timoshenko utilise ce coefficient A_z , dit "aire cisailée équivalente", pour définir le coefficient correctif de rigidité $sr_z = A/A_z$ pour la prise en compte des cisaillements transverses. Notez que le rapport A/A_z est différent du coefficient de Reissner défini ci-dessus qui représente au mieux l'énergie de déformation. Toutefois, ces coefficients sont souvent relativement proches, en particulier pour des profilés laminés.

1.3.3 Evaluation des contraintes de torsion

La torsion d'un profil se produit en général avec un gauchissement w tel que:

$$U_x = \omega(y, z) \beta_{x,x}$$

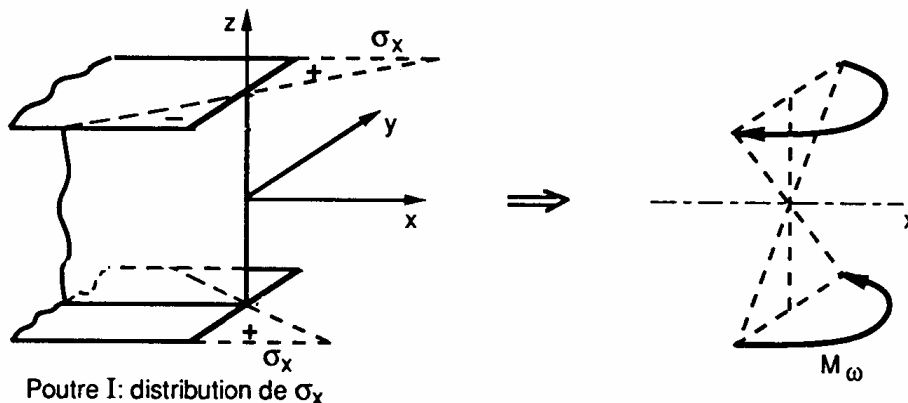
$$U_y = -z \beta_x$$

$$U_z = y \beta_x$$

\Rightarrow

$$\tau_{xy} = G_{xy} (\omega_y - z + z_c) \beta_{x,x}$$

$$\tau_{xz} = G_{xz} (\omega_z + y - y_c) \beta_{x,x}$$



Effet du gauchissement sur poutre en I

Le centre de torsion (y_c, z_c) est défini de manière à ce qu'un effort tranchant T_y ou T_z ne produise aucune torsion; soit encore, qu'une torsion ne crée pas de flèche. Les équations d'équilibre conduisent à:

$$G_{xy} \omega_{,yy} + G_{xz} \omega_{,zz} = 0, A$$

$$G_{xy} (\omega_{,y} - z + z_c) n_y + G_{xz} (\omega_{,z} + y - y_c) n_z = 0, \partial A$$

$$M_x = H_t \beta_{x,x} = \beta_{x,x} \int_A G_{xy} (\omega_{,y} - z + z_c) (z_c - z) + G_{xz} (\omega_{,z} + y - y_c) (y - y_c) dA$$

Pour une section rectangulaire homogène d'épaisseur e petite par rapport à la hauteur, le moment de torsion est approximativement:

$$M_x = \frac{h e^3}{3} G \beta_{x,x}$$

$$\tau_{\max} = e G \beta_{x,x} = 3 \frac{M_x}{h e^3}$$

Pour les profilés de faible épaisseur comme les poutres en I, U, les cornières, ce calcul peut être repris en considérant ces profilés comme un assemblage de sections rectangulaires. Toutefois, des concentrations de contraintes apparaissent aux raccords entre les ailes et l'âme. Le coefficient K de concentration de contrainte amplifie la contrainte moyenne (cf Timoshenko II, p.295).

$$K(r) = \frac{e}{r} \frac{1 - \frac{S}{4A} (r_a + r_i)}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} + \frac{Sr}{2A}, \text{ section tube}$$

$$K = 1.743 \sqrt{\frac{e}{r}}, \text{ section I, U, H}$$

Pour les profils I, H, U, le coefficient K fait intervenir l'épaisseur e de l'aile et le rayon r de raccordement entre l'âme et l'aile. Pour les tubes présentant des angles rentrant (comme un tube carré), le coefficient K fait intervenir les rayons interne r_i et externe r_a , l'aire A et le périmètre moyen S de la section.

Pour une section quelconque à paroi mince d'épaisseur e , de longueur totale S de la ligne de courbe moyenne et d'aire A contenue à l'intérieur de la ligne moyenne:

$$J = \frac{4e A^2}{S}$$

$$(J / r) = 2eA$$

1.3.4 Contraintes pour des profils variables

Les calculs menés pour des poutres de section constante ne sont pas rigoureusement applicables aux poutres de section variable. En effet, des concentrations de contraintes apparaissent lorsque la section de la poutre varie brusquement.

Par exemple, pour un arbre circulaire comportant une rainure hyperbolique de plus petit rayon r et de diamètre d , le coefficient de contrainte pour une flexion simple peut être approché par la formule $K=0.75\sqrt{(d/2r)}$ lorsque $d \gg 2r$ (cf Timoshenko II, p.304).

1.4 Formulation utilisée dans ICAB Force

Les moments de flexion sont calculés par rapport à l'axe neutre dans le repère local principal et le moment de torsion par rapport au centre de torsion (Il est supposé que l'axe de neutre coïncide avec l'axe de torsion).

axe neutre

Si le repère local n'a pas pour origine l'axe neutre, la position de l'axe neutre (y_0, z_0) est calculé de manière à ce que les rigidités de couplage membrane-flexion soient nulles:

$$H_{mfz} = \int_A E(y - y_0) dA = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{\int_A E y dA}{\int_A E dA}$$

$$H_{mfy} = \int_A E(z - z_0) dA = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{\int_A E z dA}{\int_A E dA}$$

repère principal

Nous supposons maintenant que le repère local a pour origine l'axe neutre. Si le moment d'inertie de couplage H_{fyz} n'est pas nul, une rotation des axes permet d'éliminer ce terme de couplage entre les flexions (y) et (z):

$$H_{fy} = \iint_A E z^2 dA$$

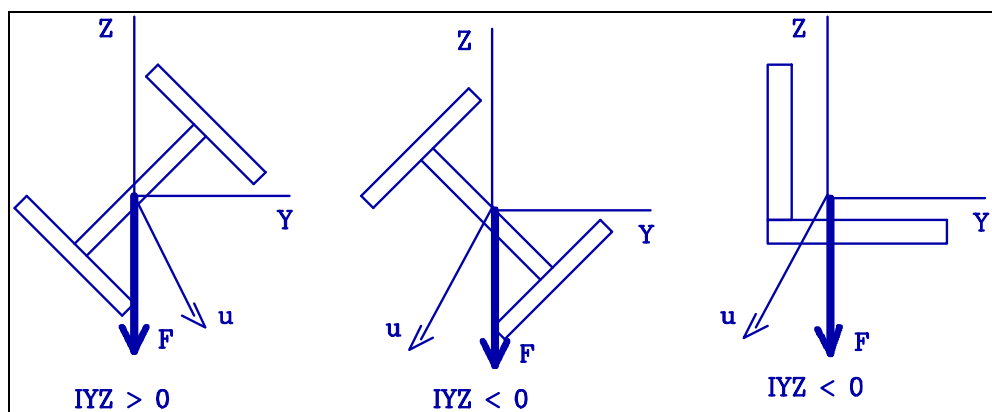
$$H_{fz} = \iint_A E y^2 dA$$

$$H_{fyz} = \iint_A E y z dA$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{-2 H_{fyz}}{H_{fy} - H_{fz}}$$

$$H_{fy}^I, H_{fz}^I = \frac{H_{fy} + H_{fz}}{2} \pm \frac{\sqrt{(H_{fy} - H_{fz})^2 + 4 H_{fyz}^2}}{2}$$

$$\begin{bmatrix} H_{fy}^I & 0 \\ 0 & H_{fz}^I \end{bmatrix} = [R]^{-1} \begin{bmatrix} H_{fy} & H_{fyz} \\ H_{fyz} & H_{fz} \end{bmatrix} \cdot [R], [R] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$



Pour les poutres constituées d'un matériau isotrope homogène comme l'acier, les rigidités sont calculées à partir d'intégrales sur la section où seules les caractéristiques géométriques interviennent.

Si les moments d'ordre 1 sont nuls, ce qui est le cas si les calculs sont réalisés à partir de l'axe neutre, nous avons:

$$\begin{aligned}
A &= \iint_A dA, \quad H_m = EA \\
\iint_A y dA &= 0, \quad S_{yy} = \iint_{A,y>0} y dA \\
\iint_A z dA &= 0, \quad S_{zz} = \iint_{A,z>0} z dA \\
I_{yy} &= \iint_A z^2 dA, \quad H_{fy} = E I_{yy} \\
I_{zz} &= \iint_A y^2 dA, \quad H_{fz} = E I_{yy} \\
I_{yz} &= \iint_A yz dA, \quad H_{fyz} = E I_{yz} \\
J &= \iint_A (y^2 + z^2) + (y\omega_{,z} - z\omega_{,y}) dA, \quad H_t = GJ
\end{aligned}$$

Ces coefficients sont l'aire A , les moments statiques S_{yy} , S_{zz} , les moments d'inertie I_{yy} , I_{zz} et le moment de torsion J . Les efforts résultants sont donc:

$$\begin{aligned}
N_x &= EAe \\
T_y &= \frac{GA}{sr_y} \gamma_y \\
T_z &= \frac{GA}{sr_z} \gamma_z \\
M_x &= GJ \beta_{x,x} \\
M_y &= EI_{yy} \chi_y - EI_{yz} \chi_z \\
M_z &= EI_{zz} \chi_z - EI_{yz} \chi_y
\end{aligned}$$

Il est toujours possible de choisir un repère dans le plan de la section (yz) de façon à ce que I_{yz} soit nul. Dans ce cas, les axes (y) et (z) sont les axes principaux d'inertie de la section de la poutre. Le comportement de la poutre est donc simplement caractérisé par:

- deux coefficients portant sur les matériaux (E et $G=E/(2+2\nu)$, où ν est le coefficient de Poisson). Pour l'acier utilisé couramment dans les constructions métalliques $E=210 \times 10^9$ Pa, $\nu=0.3$,
- six coefficients caractéristiques de la géométrie A (aire de la section), I_{yy} , I_{zz} (moments d'inertie), J (constante de torsion éventuellement corrigée telle que $J < J^*$), sr_y , sr_z (coefficients de correction de l'aire cisailée).

Les paramètres de l'entité PROPERTY(TYPE=ISOTROPIC) qui définissent le matériau sont $E=E$, $NU=\nu$. G est défini comme $G = E/(2+2\nu)$.

Les paramètres de l'entité PROPERTY(TYPE=BEAM_LINEAR) qui définissent les propriétés physiques sont $AR=A$, $IYY=I_{yy}$, $IZZ=I_{zz}$, $TC=J$, $SRY=sr_y$, $SRZ=sr_z$.

Matrice de rigidité élémentaire

Par intégration à partir des relations contraintes/déformations indiquées dans les sections précédentes, les relations efforts résultants F (N , T_y , T_z , M_x , M_y , M_z) aux extrémités d'une poutre s'expriment en fonction des déplacements q à ces mêmes extrémités.

Pour une poutre de section droite sans excentration de fibre neutre ni de centre de torsion, les axes locaux étant principaux, la matrice de rigidité élémentaire d'une poutre à deux nœuds telle que $F=K.q$ est :

$$\mathbf{q}^T = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_{x_1} \quad \theta_{y_1} \quad \theta_{z_1} \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \theta_{x_2} \quad \theta_{y_2} \quad \theta_{z_2}]$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_Z}{L^3(1+\phi_Y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_Z}{L^2(1+\phi_Y)} & 0 & \frac{-12EI_Z}{L^3(1+\phi_Y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_Z}{L^2(1+\phi_Y)} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_Y}{L^3(1+\phi_Z)} & 0 & \frac{-6EI}{L^2(1+\phi_Z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{-12EI_Y}{L^3(1+\phi_Z)} & 0 & \frac{-6EI_Y}{L^2(1+\phi_Z)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_Y}{L^2(1+\phi_Z)} & \frac{(4+\phi_Z)EI_Y}{L(1+\phi_Z)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_Y}{L^2(1+\phi_Z)} & 0 & \frac{(2-\phi_Z)EI_Y}{L(1+\phi_Z)} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_Z}{L^2(1+\phi_Y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\phi_Y)EI_Z}{L(1+\phi_Y)} & 0 & \frac{-6EI_Z}{L^2(1+\phi_Y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2-\phi_Y)EI_Z}{L(1+\phi_Y)} \\ -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_Z}{L^3(1+\phi_Y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_Z}{L^2(1+\phi_Y)} & 0 & \frac{12EI_Z}{L^3(1+\phi_Y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_Z}{L^2(1+\phi_Y)} \\ 0 & 0 & \frac{-12EI_Y}{L^3(1+\phi_Z)} & 0 & \frac{6EI_Y}{L^2(1+\phi_Z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_Y}{L^3(1+\phi_Z)} & 0 & \frac{6EI_Y}{L^2(1+\phi_Z)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_Y}{L^2(1+\phi_Z)} & \frac{(2-\phi_Z)EI_Y}{L(1+\phi_Z)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_Y}{L^2(1+\phi_Z)} & 0 & \frac{(4+\phi_Z)EI_Y}{L(1+\phi_Z)} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_Z}{L^2(1+\phi_Y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2-\phi_Y)EI_Z}{L(1+\phi_Y)} & 0 & \frac{-6EI_Z}{L^2(1+\phi_Y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\phi_Y)EI_Z}{L(1+\phi_Y)} \end{bmatrix}$$

1.5 Précontraintes

Lorsqu'une poutre est précontrainte, la relation entre efforts résultants et déformations fait intervenir ces précontraintes.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ T_y \\ T_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = [H] \cdot \begin{bmatrix} e \\ \gamma_y \\ \gamma_z \\ \beta_{x,x} \\ \chi_y \\ \chi_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_x^0 \\ T_y^0 \\ T_z^0 \\ M_x^0 \\ M_y^0 \\ M_z^0 \end{bmatrix}$$

La matrice [H] contient les termes de rigidité définis dans les sections précédentes.

Efforts de précontraintes

Les efforts de précontraintes en tension N_x et moments (M_y , M_z) dans une poutre correspondent aux efforts initiaux dans la poutre lorsque la poutre est encastree à ses extrémités. Si les extrémités sont libres, une tension initiale $N_x > 0$ produira un raccourcissement de la poutre; un moment initial $M_z > 0$ produira une flèche positive.

Efforts tranchants de précontrainte: si les moments fléchissants ne sont pas équilibrés, un effort tranchant est introduit pour assurer l'équilibre de la poutre:

$$My_1 + T_z \cdot L - My_2 = 0 \Rightarrow T_z = \frac{My_2 - My_1}{L}$$

$$Mz_1 - Ty \cdot L - Mz_2 = 0 \Rightarrow Ty = -\frac{Mz_2 - Mz_1}{L}$$

ATTENTION: une poutre précontrainte ne peut être fractionnée en plusieurs tronçons. Si tel est le cas, chaque tronçon est précontraint.

Dilatations thermiques

Nous notons α le coefficient de dilatation thermique du matériau de la poutre dans le sens de l'axe (x), $\Delta T = (T - T_{ref})$ l'écart de température par rapport à la température de référence pour laquelle les dilatations thermiques sont nulles. Nous avons:

$$\begin{aligned} e_{xx}^0 &= \alpha \Delta T, \gamma_{xy}^0 = 0, \gamma_{xz}^0 = 0 \\ \sigma_{xx}^0 &= -E e_{xx}^0, \sigma_{xy}^0 = 0, \sigma_{xz}^0 = 0 \end{aligned}$$

$$N_x^0 = \iint_A -E \alpha \Delta T ds$$

$$M_y^0 = \iint_A -z E \alpha \Delta T ds$$

$$M_z^0 = \iint_A y E \alpha \Delta T ds$$

Les moments fléchissants sont créés par un gradient thermique dans le sens (y) ou (z) de l'épaisseur de la poutre. ICAB Force ne prend pas en compte les gradients thermiques dans le sens de l'épaisseur.

1.6 Pression dans les tubes

Pour les poutres de section circulaire creuse (CHS), le chargement d'un fluide sous pression est calculé de la manière suivante :

$$p = \begin{cases} p_0 + \rho \cdot g \cdot (z_0 - z) & \text{si } \dots z \leq z_0 \\ p_0 & \text{si } \dots z > z_0 \end{cases}$$

avec :

- p_0 pression interne dans le tube
- ρ densité du fluide
- g champ de gravité ($g = -9.80665 \text{ m.s}^{-2}$)
- z_0 hauteur de référence en dessous de laquelle la pression hydrostatique du fluide apparaît
- z hauteur du point de calcul de la pression

La contrainte de membrane due à la pression interne dans le tube est :

$$\sigma_{tt} = p \cdot \frac{R}{t}$$

avec :

- R rayon du tube
- t épaisseur du tube

Par ailleurs, le fluide sous pression crée un effet de fond aux extrémités du tube, c'est-à-dire une poussée calculée à partir de la pression moyenne dans le tube :

$$F = \frac{p(z_1) + p(z_2)}{2} \cdot A_r, \dots \text{avec } A_r = \pi \cdot (R - t)^2$$

Le poids du fluide crée également une charge linéique égale à:

$$f = \rho \cdot g \cdot A_r$$

2 Contraintes limites

Les critères de ruine peuvent se diviser en deux grandes catégories. La première concerne l'état de contrainte, la seconde est relative aux instabilités pour lesquelles les critères font intervenir l'état de contrainte et les caractéristiques géométriques de toute la structure. Ce chapitre traite des critères de ruine portant sur l'état de contrainte.

2.1 Contraintes maximales

Une fois les efforts résultants connus section par section, il est nécessaire de déterminer le champ de contraintes sur chaque section, ou au moins les contraintes maximales sur chaque section.

La contrainte s_{xx} est constante dans la section si la poutre est soumise à un effort de traction ou de compression pur. Dans ce cas, cette contrainte est notée s_{Nx} .

La contrainte s_{xx} n'est plus constante si un moment fléchissant simple ou dévié existe. Nous notons s_{fy} la contrainte s_{xx} maximale présente dans la section lorsque la poutre est soumise à un moment fléchissant pur M_y .

Les cisaillements apparaissent lorsque la poutre est soumise à un moment de torsion ou des efforts tranchants. Un effort tranchant T_y (respectivement T_z) crée une distribution de contrainte de cisaillement t_{xy} (respectivement t_{xz}). Une torsion, associée à un couple M_x , crée des contraintes t_{xy} , t_{xz} ⁽¹⁾.

$$\sigma_{Nx} = \frac{N_x}{A}, \quad \sigma_{fy} = \frac{M_y}{\left(\frac{I}{v}\right)_y}, \quad \sigma_{fz} = \frac{M_z}{\left(\frac{I}{v}\right)_z}$$

$$\tau_T = \frac{M_x}{\left(\frac{J}{r_0}\right)}, \quad \tau_y = \frac{T_y}{A_y}, \quad \tau_z = \frac{T_z}{A_z}$$

Les paramètres de l'entité PROPERTY(TYPE=BEAM_LINEAR) relatifs au calcul de ces contraintes maximales sont AR=A, ARY=A_y, ARZ=A_z, IVY=(I/v)_y, IVZ=(I/v)_z, ITC=(J/r₀). Si les sections cisailées A_y et A_z sont nulles, la section totale A est prise en compte pour les calculs des contraintes de cisaillement τ_y et τ_z .

Cas des poutres avec moment d'inertie croisé Iyz

$$\begin{bmatrix} \Lambda_y \\ \Lambda_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{YY} & -I_{YZ} \\ -I_{YZ} & I_{ZZ} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{fy} \\ \sigma_{fz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_y & \cdot \\ \cdot & v_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_y \\ \Lambda_z \end{bmatrix}, \quad v_y = \frac{I_{yy}}{\left(\frac{I}{v}\right)_y}, \quad v_z = \frac{I_{zz}}{\left(\frac{I}{v}\right)_z}$$

Ces contraintes caractéristiques définissent des majorants pour les contraintes σ_{xx} , τ_{xy} et τ_{xz} .

⁽¹⁾ N.B. Ces calculs ne sont rigoureux que lorsque les résultantes des forces et moments sont évalués sur la fibre neutre de la poutre. En effet, une excentration de la fibre neutre provoque en général un couplage de toutes les résultantes; par exemple un effort de traction peut engendrer un effort normal ainsi que des moments fléchissant.

Avec les éléments BEAM_LINEAR proposés par ICAB Force, l'axe (x) correspond à la fibre neutre. Toutefois, la modélisation d'une excentration de la fibre neutre est possible avec l'emploi de barres rigides (RIGID_BAR) placées aux extrémités de la poutre.

$$M_y = M_z = 0 \Rightarrow \sigma_{xx} = \sigma_{Nx}$$

$$N_x = 0, M_z = 0 \Rightarrow |\sigma_{xx}| \leq |\sigma_{fy}|$$

$$N_x = 0, M_y = 0 \Rightarrow |\sigma_{xx}| \leq |\sigma_{fz}|$$

$$T_y = T_z = 0 \Rightarrow \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 \leq \tau_T^2$$

$$T_z = 0, M_x = 0 \Rightarrow |\tau_{xy}| \leq |\tau_y|$$

$$T_y = 0, M_x = 0 \Rightarrow |\tau_{xz}| \leq |\tau_z|$$

Pour une poutre de section quelconque, la contrainte axiale et le cisaillement sont majorés par:

$$|\sigma_{xx}| = \sigma \leq |\sigma_{Nx}| + |\sigma_{fy}| + |\sigma_{fz}|$$

$$\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 = \tau^2 \leq \tau_1^2 + \tau_2^2$$

$$\tau_1 = |\tau_T| + \max(|\tau_y|, |\tau_z|)$$

$$\tau_2 = \min(|\tau_y|, |\tau_z|)$$

Pour une poutre possédant une symétrie de révolution autour de son axe xx, nous avons:

$$|\sigma_{xx}| = \sigma \leq |\sigma_{Nx}| + \sqrt{\sigma_{fy}^2 + \sigma_{fz}^2}$$

$$\tau \leq |\tau_T| + \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2}$$

2.2.1 Traction/compression

La vérification de sécurité se traduit par:

$$\sigma/\sigma_e < 1$$

où σ est la contrainte maximale de traction ou de compression (règle CM66 1,312). La contrainte s est la somme $\sigma_{Nx} + \sigma_{fy} + \sigma_{fz}$.

2.3.2 Cisaillement

La vérification de sécurité se traduit par:

$$\tau/(0.65 \sigma_e) < 1$$

où τ est la contrainte maximale de cisaillement (règle CM66 1,313). La contrainte maximale de cisaillement est majorée par τ , telle que $\tau^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2$.

2.4.3 Critère de Von Mises

Le critère de Von Mises est utilisé pour déterminer si un matériau isotrope subit une plastification. Pour un tenseur de contrainte symétrique quelconque, le critère de non-plastification est:

$$\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}{2\sigma_e^2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\sigma_{zz} + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}{\sigma_e^2} \leq 1$$

Dans le cas d'une poutre, nous avons:

$$\frac{\sigma_{xx}^2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)}{\sigma_e^2} \leq \frac{\sigma^2 + 3\tau^2}{\sigma_e^2} \leq 1$$

Pour un tube sous pression, c'est-à-dire avec une contrainte de membrane σ_{tt} , le critère de Mises est :

$$\frac{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{tt}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{tt} + 3\tau^2}{\sigma_e^2} \leq 1, \dots \text{avec} \dots \sigma_{xx} = \sigma_{Nx} \pm \sigma_f$$

avec :

σ_{Nx} contrainte axiale associée à l'effort de traction/compression
 σ_f contrainte axiale associée aux efforts de flexion

NB. Le critère de Mises calculé par ICAB correspond à la racine carrée de l'expression indiquée ci-dessus de manière à rendre ce critère proportionnel à la charge appliquée.

Le critère de Von Mises n'est pas mentionné dans les règles CM66. Toutefois, ce critère est calculé par ICAB dans la mesure où il rend compte d'un état de contrainte quelconque. Pour un cisaillement pur, la plastification apparaît lorsque $\tau = \sigma/\sqrt{3} = 0.58\sigma$, alors que les règles CM66 prévoient une vérification de sécurité par $\tau < 0.65\sigma$ (paragraphe 1,313). L'application du critère de Mises place donc le concepteur en sécurité.

Exemple: $\sigma_0 = 235$ MPa pour l'acier S235 (référence EN10025 citée dans l'Eurocode 3).

2.5.4 Critère de Tsai-Wu

Le critère de Von Mises ne peut s'appliquer qu'à des matériaux isotropes. Dans le cas de composites ou du bois, les contraintes admissibles dépendent non seulement de la direction de sollicitation mais également du sens de traction ou compression.

Le critère de Tsai-Wu généralise le critère de Von Mises à des matériaux orthotropes dont les contraintes admissibles dans les 3 axes d'orthotropie sont les suivantes:

X_t, X_c traction et compression dans le sens 1
 Y_t, Y_c traction et compression dans le sens 2
 Z_t, Z_c traction et compression dans le sens 3
 t_{12}, t_{13}, t_{23} cisaillements

$$\sigma_{xx} \left(\frac{\sigma_{xx}}{X_t X_c} + \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \right) + \sigma_{yy} \left(\frac{\sigma_{yy}}{Y_t Y_c} + \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) + \sigma_{zz} \left(\frac{\sigma_{zz}}{Z_t Z_c} + \frac{1}{Z_t} - \frac{1}{Z_c} \right)$$

$$- (1 + f_{12}) \frac{\sigma_{xx} \sigma_{yy}}{\sqrt{X_t X_c Y_t Y_c}} - (1 + f_{23}) \frac{\sigma_{yy} \sigma_{zz}}{\sqrt{Y_t Y_c Z_t Z_c}} - (1 + f_{13}) \frac{\sigma_{xx} \sigma_{zz}}{\sqrt{X_t X_c Z_t Z_c}}$$

$$+ \frac{\tau_{xy}^2}{\tau_{12}^2} + \frac{\tau_{yz}^2}{\tau_{23}^2} + \frac{\tau_{xz}^2}{\tau_{13}^2} \leq 1$$

NB. Le critère de TsaiWu calculé par ICAB correspond à la racine carrée de l'expression indiquée ci-dessus.

Pour un matériau isotrope transverse, le critère de Tsai-Wu est identique au critère de Hill si:

$$X=X_t=X_c; Y=Y_t=Y_c=Z_t=Z_c$$

$$f_{12} = f_{13} = Y/X - 1; f_{23} = 1 - Y/X$$

Le critère de Tsai-Wu est identique au critère de Von Mises si:

$$X_t = X_c = Y_t = Y_c = Z_t = Z_c = s_0$$

$$t_{12} = t_{23} = t_{13} = t_0 = s_0/\sqrt{3}$$

$$f_{12} = f_{23} = f_{13} = 0$$

Valeurs par défaut: si toutes les contraintes admissibles ne sont pas indiquées dans les caractéristiques du matériau, alors les valeurs suivantes sont appliquées:

$$Z_t=0 \Rightarrow Z_t = Y_t$$

$$t_{13}=0 \Rightarrow t_{13} = t_{12}$$

$$t_{23}=0 \Rightarrow t_{23} = t_{12}$$

$$X_c=0 \Rightarrow X_c = X_t$$

$$Y_c=0 \Rightarrow Y_c = Y_t$$

$$Z_c=0 \Rightarrow Z_c = Y_t$$

Si certaines valeurs sont encore nulles après les affectations par défaut, alors ces valeurs sont considérées comme infinies, ce qui revient à considérer que ces contraintes admissibles sont très grandes. Par exemple, si $Y_c=0$, alors les calculs sont menés en prenant $1/Y_c = 0$.

Exemple de contraintes admissibles pour des essences de bois comprenant 15% d'humidité (cf section 3,12 CB71 avec coefficient de sécurité de 2.75).

contraintes admissibles en bars	Traction axiale X_t	Compression axiale X_c	flexion X_f	Traction transversale Z_t	Compression transversale	Cisaillement longitudinale
chêne catégorie 1	164	136	147	13	49	22
chêne catégorie 2	98	109	125	11	39	16
résineux catégorie 1	152	131	142	9	27	16
résineux catégorie 2	87	103	109	7	22	13
lamellés-collés catégorie 1	167	144	156	5	27	10
lamellés-collés catégorie 2	96	113	120	5	22	10

3 Instabilités

3.1 Flambement généralisé

L'instabilité élastique (flambement) d'une structure se produit lorsqu'un léger accroissement du chargement entraîne des déformations importantes, provoquant l'effondrement. Le calcul du flambement se déroule en deux étapes:

- la structure est sollicitée par un chargement qui produit une distribution de contraintes (σ).
- le chargement initial est multiplié par un facteur μ .

Le flambement apparaît lorsque l'énergie de déformation élastique est équivalente au travail des contraintes initiales (s). Dans ce cas, un accroissement infime du chargement produit des déplacements infinis. La recherche des flambements se ramène au calcul des vecteurs propres $\{u\}$ et valeurs propres μ qui sont respectivement les modes de flambement et les coefficients d'amplification des charges:

$$[K]\{u\} + \mu [K_D(\sigma)]\{u\} = 0$$

$$[K_D] = \int_{Vol} k_{\omega}(\sigma) dV$$

$$k_{\omega}(\sigma) = \begin{bmatrix} \sigma_{yy} + \sigma_{zz} & -\tau_{xy} & -\tau_{xz} \\ -\tau_{xy} & \sigma_{xx} + \sigma_{zz} & -\tau_{yz} \\ -\tau_{xz} & -\tau_{yz} & \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \end{bmatrix}$$

$[K]$ est la matrice de rigidité élastique

$[K_D(s)]$ est la matrice de rigidité différentielle associée au champ de contraintes initiales (s) obtenue par intégration sur la structure des matrices élémentaires $k_{\omega}(\sigma)$.

La ruine apparaît pour la plus petite valeur propre μ , c'est-à-dire le **plus petit coefficient d'amplification du chargement initial**. Le mode propre associé correspond à la déformée de ce coefficient d'amplification. Notez bien que le mode de flambement obtenu dépend de l'ensemble des éléments de la structure, de ses conditions de blocage et de son chargement initial.

Cas d'une poutre comprimée articulée à ses extrémités

L'effort de compression axial N modifie le comportement de flexion de la poutre. Pour une traction axiale, les fréquences de vibration en flexion augmentent (cas des cordes d'instruments de musique). En revanche, les fréquences de vibration de la poutre en flexion diminuent au fur et à mesure que l'effort de compression axial augmente. La première fréquence propre devient nulle pour une charge critique:

$$N = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

Le flambement peut être interprété comme une résonance qui se produit à fréquence nulle, autrement dit un mode de déformation qui apparaît pour une charge quasi-statique.

Estimation de la longueur de flambement à partir du coefficient μ de flambement généralisé

Lorsque le coefficient μ est estimé par analyse en flambement généralisé, la longueur de flambement l d'une poutre soumise à un effort de compression N_x peut être estimée comme:

$$N_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l^2} = \mu \cdot N_x$$

$$l = \pi \sqrt{\frac{EI}{\mu \cdot N_x}}$$

3.1.1 Longueurs de flambement

L'analyse du flambement généralisé doit porter sur l'ensemble de la structure pour la détermination des modes de flambement $\{u\}$ et des coefficients d'amplification des charges λ . Toutefois, sans ordinateur, ce calcul devient vite hors de portée même pour un assemblage de quelques poutres.

Pour pallier cette difficulté, les règles (CM66, CB71, Eurocodes...) définissent des critères de flambements locaux qui sont applicables poutre par poutre. Ces critères réduisent l'étude d'une poutre prise dans un assemblage à des poutres équivalentes de longueur l_k dont les extrémités sont articulées (extrémités maintenues vis-à-vis du mouvement latéral, mais libres de tourner) pour l'étude du flambement ou bien à des poutres de longueur l_D dont les extrémités sont maintenues latéralement (encastées contre le mouvement latéral, encastrement contre la rotation suivant l'axe longitudinal, libre de tourner dans le plan) pour l'étude du déversement:

l_{ky}	longueur de flambement dans le plan (XoZ) entraînant un moment M_{yy}
l_{kz}	longueur de flambement dans le plan (XoY) entraînant un moment M_{zz}
l_{Dy}	longueur de déversement dans le plan (XoZ) concernant un moment M_{yy}
l_{Dz}	longueur de déversement dans le plan (XoY) concernant un moment M_{zz}

ICAB calcule les longueurs de flambement l_{ky} et l_{kz} en prenant en compte les blocages et les rigidités des éléments adjacents à la poutre en cours d'étude. Ce calcul n'est pas exact si les éléments adjacents sont eux-mêmes assemblés à d'autres éléments et non pas à des blocages; autrement dit, l'effet des rigidités des éléments adjacents est surestimé et par conséquent les longueurs de flambement l_{ky} , l_{kz} en général sous-estimées. Afin de prendre en compte des longueurs de flambement plus longues, l'utilisateur peut imposer des longueurs minimales de flambement L_{KM} et déversement L_{DM} (propriétés LKY, LKZ, LDY, LDZ des poutres). Pour assurer la compatibilité des calculs pour les versions ICAB antérieures à la version 3, si LKY=0 alors LKY=LKZ et si LDY=0, alors LDY=LDZ; la réciproque n'est pas vraie.

Par ailleurs, les longueurs de flambement prises en compte pour les critères de ruine sont toujours au moins égales à la longueur de la poutre $L_{(N1,N2)}$. La longueur de déversement l_{Dy} est égale à la plus longue des longueurs L_{DY} et $L_{(N1,N2)}$.

Cas du flambement généralisé

Après une analyse au flambement généralisé, le plus petit coefficient μ est employé pour estimer un minorant des longueurs de flambement poutre par poutre (v5.210).

3.2 Flambement par compression

Une poutre en compression devient brutalement instable bien avant que la limite d'élasticité ne soit atteinte, c'est à dire avoir $\sigma < \sigma_e$ et assister une grande déformation de la poutre entraînant sa ruine. Il s'agit du phénomène de flambement étudié par Euler. Des études plus complètes ont été conduites par Dutheil et ont été adoptées par les règles CM66 pour des chargements complexes combinant compression et flexion.

La longueur de flambement l_{ky} est déterminée par ICAB Force comme la plus grande des longueurs l_{ky} , L_{KY} indiquée par le paramètre LKY des propriétés physiques de la poutre et $L_{(N1,N2)}$ qui est la distance entre l'origine et l'extrémité de la poutre. Un calcul analogue est mené pour l_{kz} . Les paramètres LKY, LKZ ne sont utilisés que pour le calcul des critères de ruine; ils ne modifient en aucune manière le calcul des déplacements, des efforts résultants et des contraintes.

Les élancements l sont calculés comme ci-après:

$$\lambda_y = \frac{l_{ky}}{i_y}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_{yy}}{A}}, \quad l_{ky} = \max(LKY, L_{(N1,N2)}, L_{ky})$$

$$\lambda_z = \frac{l_{kz}}{i_z}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_{zz}}{A}}, \quad l_{kz} = \max(LKZ, L_{(N1,N2)}, L_{kz})$$

$$\lambda_v = \frac{l_{kv}}{i_v}, \quad i_v = \sqrt{\frac{I_{vv}}{A}}, \quad l_{kv} = \max(l_{ky}, L_{kz})$$

3.3 Déversement et flambement

Le déversement des pièces fléchies est un phénomène d'instabilité élastique qui présente des analogies avec le flambement. Le déversement se produit lorsqu'une poutre fléchie présente une faible inertie à la flexion transversale et à la torsion. La partie supérieure de la poutre, comprimée, flambe latéralement et il existe une valeur critique du moment de flexion (selon le plan de plus grande raideur), comme il existe un effort normal critique provoquant le flambement pour une barre comprimée, pour lequel la poutre fléchit dans le plan de sa plus faible raideur et entre en torsion.

Le critère calculé par ICAB Force utilise une formule enveloppe qui permet de combiner les effets d'une compression et d'une flexion déviée.

4 Critères d'instabilité CM66 – constructions en acier

4.1 Flambement par compression simple CM66

Le flambement CM66 est basé sur la méthode Dutheil qui propose une amplitude initiale de la flèche e_0 en fonction des imperfections :

$$e_0 = 0.3 \frac{W_{el}}{A} \bar{\lambda}^2$$

La méthode Eurocode propose une méthode qui introduit un paramètre d'imperfection α qui est fonction du type de profilé

$$e_0 = 0.3 \frac{W_{el}}{A} \alpha (\bar{\lambda} - 2)$$

La vérification de la règle CM66 3,411 conduit à (coefficient ICAB Force "Flambement CM66"):

$$k \sigma_{Nx} / \sigma_e < 1$$

avec:

$$k = \left(0.5 + 0.65 \frac{\sigma_e}{\sigma_k} \right) + \sqrt{\left(0.5 + 0.65 \frac{\sigma_e}{\sigma_k} \right)^2 - \frac{\sigma_e}{\sigma_k}}$$

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad \lambda = \max(\lambda_y, \lambda_z)$$

$$(I_{yz} \neq 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_v)$$

Compression et flexion dans le plan de flambement F_CM66

Pour une poutre soumise à une compression et une flexion entraînant une rotation autour de l'axe y, les règles CM66 (3,521) précisent que pour les poutres à âme pleine, la condition de non-flambement est:

$$\frac{k_1 \sigma_{Nx} + k_{fy} \sigma_{fy} + k_{fz} \sigma_{fz}}{\sigma_e} \leq 1$$

Le coefficient k_1 correspond au coefficient de flambement pour vérification exceptionnelle (règle CM66 3,412).

$$k_l = \frac{\mu_l - 1}{\mu_l - 1.3}, \quad \mu_l = \frac{\sigma_k}{\sigma_{Nx}}$$

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad \lambda = \max(\lambda_y, \lambda_z)$$

$$(I_{yz} \neq 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_v)$$

Le coefficient k_{fy} d'amplification des contraintes de flexion est pris pour le cas le plus défavorable qui correspond à un moment constant ou variant linéairement (règle CM66 3,513):

$$k_{fy} = \frac{\mu_y + 0.25}{\mu_y - 1.3}, \quad \mu_y = \frac{\sigma_{ky}}{\sigma_{Nx}}$$

$$\sigma_{ky} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_y^2}, \quad \lambda_y = \frac{l_{ky}}{\sqrt{\frac{I_{yy}}{A}}}$$

Des relations analogues sont établies pour une compression et un moment de flexion M_z .

4.3 Déversement réglementaire CM66

Les règles CM66 (3,611) précisent que pour les poutres à âme pleine, la condition de non-déversement est:

$$k_{dy} \sigma_{fy} / \sigma_e \leq 1$$

La contrainte σ_{fy} est provoquée par une flexion autour de l'axe (y) correspondant à la plus grande inertie ($I_{yy} > I_{zz}$). Le coefficient k_d est défini comme suit:

$$k_{dy} = 1, \quad \sigma_{dy} \geq \sigma_e$$

$$k_{dy} = \frac{k_0}{1 + \frac{\sigma_{dy}}{\sigma_e} (k_0 - 1)}, \quad \sigma_{dy} < \sigma_e$$

$$\sigma_{dy} = \frac{\pi^2 E}{5.2} \frac{I_{zz}}{I_{yy}} \frac{h_z^2}{l_{Dy}^2} (D - 1) BC$$

$$k_0 = \left(0.5 + 0.65 \frac{\sigma_e}{\sigma_{k0}} \right) + \sqrt{\left(0.5 + 0.65 \frac{\sigma_e}{\sigma_{k0}} \right)^2 - \frac{\sigma_e}{\sigma_{k0}}}$$

$$\sigma_{k0} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_0^2}, \quad \lambda_0 = \frac{l_{Dy}}{h_z} \sqrt{\frac{4}{BC} \frac{I_{yy}}{I_{zz}} \left(1 - \frac{\sigma_{Dy}}{\sigma_e} \right)}$$

Les coefficients B, C, D sont utilisés pour tenir compte du niveau d'application des charges, de la répartition longitudinale des charges et des dimensions de la pièce.

$$D = \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{GJ}{E I_{zz}} \frac{l_k^2}{h_z^2}}$$

$$C = \sqrt{1 + \frac{3}{1 + \frac{M_e}{M_w} + \left(\frac{M_e}{M_w} \right)^2} - 0.152 \left(1 - \frac{M_e}{M_w} \right)^2}$$

$$B = \sqrt{1 + \left(\frac{z_a}{h_z} \frac{8\beta C}{\pi^2 D} \right)^2} - \frac{z_a}{h_z} \frac{8\beta C}{\pi^2 D}$$

Le calcul de C n'est rigoureux que pour des poutres soumises à deux moments au droit des appuis avec des semelles libres de tourner par rapport à l'axe (z); M_w et M_e sont ces deux moments, M_w étant le plus élevé. Le coefficient B retenu est la plus petite des valeurs de B calculées pour $z_a=0, h/2$. Le coefficient $\beta=3$ correspond à une charge uniformément répartie sur une poutre libre de tourner aux extrémités autour des axes (z) (cf règle CM66 3,643).

Niveau d'application des charges Z_a

Le paramètre Z_a des propriétés de poutre permet d'indiquer la position des pannes sur un arbalétrier. Si le paramètre Z_a est nul, le coefficient B est calculé de la manière la plus défavorable et pour les moments positifs et négatifs.

En revanche, lorsque le paramètre Z_a est non nul, le coefficient B est calculé en fonction de Z_a . Pour indiquer que les charges sont appliquées sur la fibre neutre, il suffit d'indiquer une valeur Z_a non nulle mais infime.

Par ailleurs, lorsque Z_a atteint la moitié de la hauteur de l'âme $Z_a=h/2$, la vérification du déversement soumise à un moment M_{yy} n'est vérifiée que pour les moments M_{yy} positifs, c'est-à-dire pour les soulèvements (Si $Z_a = -h/2$, le déversement est négligé pour M_{yy} négatif).

Formule enveloppe réglementaire **D_CM66**

Lorsqu'une poutre est soumise simultanément à une compression et une flexion déviée, la formule enveloppe de la règle CM66 (3,731) à vérifier est (coefficient ICAB Force "Déversement CM66"):

$$\frac{\sigma_{N_x} k + \sigma_{f_y} k_{f_y} k_{d_y} + \sigma_{f_z} k_{f_z} k_{d_z}}{\sigma_e} \leq 1$$

La contrainte σ_{N_x} n'est prise en compte que si la poutre est en compression.

4.4 Voilement

Le voilement d'une plaque rectangulaire apparaît lorsque cette plaque est soumise à une compression uniforme sur deux côtés opposés, parallèlement à son plan moyen; la plaque se déforme transversalement. Le phénomène de voilement se manifeste par des ondulations, qui ne sont pas sans rappeler le phénomène de flambement pour des pièces à une dimension, à la différence près que le voilement se développe plus progressivement, les grandes déformations n'apparaissant pas brutalement et ne conduisant généralement pas à la ruine de la pièce. Un effort de cisaillement peut aussi provoquer le voilement.

Pour des poutres composées à âmes pleines (CM66 5,212), la vérification de sécurité se traduit par (coefficient ICAB Force "Voile CM66"):

$$\frac{\left(\frac{\sigma}{7}\right)^2 + \tau^2}{0.015 \left(\frac{E}{21000}\right)^2 \left(\frac{1000 e_a}{h_z}\right)^4} \leq 1 \quad (16)$$

e_a est l'épaisseur de l'âme. Le rapport $E/21000$ sert uniquement à convertir les contraintes dans les unités choisies par l'utilisateur à partir des daN/mm^2 . Cette formule n'est donc valable que pour les poutrelles en acier $E=21000 \text{ daN/mm}^2 = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$.

4.5 Additif 80

La formule enveloppe pour vérifier le flambement et le déversement défini dans l'additif 80 est:

$$k_{80} \frac{|N_x|}{N_P} + \frac{k_{fy}}{k_{Dy80}} \frac{|M_y|}{M_{Py}} + \frac{k_{fz}}{k_{Dz80}} \frac{|M_z|}{M_{Pz}} \leq 1$$

$$k_{fy80} = \frac{C_{mx}}{1 - \left(\frac{\lambda_y}{\lambda_r}\right)^2 \frac{|N_x|}{N_P}}$$

$$k_{fz80} = \frac{C_{my}}{1 - \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_r}\right)^2 \frac{|N_x|}{N_P}}$$

$$\lambda_r = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_e}}$$
(17)

Le coefficient k_{80} dépend du type de profilé. Dans ICAB Force, ce coefficient est approché par k (CM66 3,411). Les coefficients C_{mx} et C_{my} sont fonction du mode de chargement et d'appui. Dans ICAB Force/CM, ces coefficients sont égaux à 1, ce qui place en sécurité. La charge et les moments de plastification sont:

$$N_P = A \sigma_e, \quad M_{Py} = 2S \sigma_e, \quad M_{Pz} = \left(\frac{I}{v}\right)_z \sigma_e$$

Si le moment de plastification S est nul, alors les calculs sont réalisés avec $2S=(I/v)_y$.

Le coefficient de déversement k_{D80} est tel que:

$$k_{Dy80} = \frac{I}{\sqrt[n]{I + \left(\frac{M_{Py}}{M_{Dy}}\right)^n}}$$

$n=2$ pour les profilés laminés

$n=1.5$ pour les profilés reconstitués

Dans ICAB Force/CM, le plus petit des coefficients est retenu dans les calculs.

Le moment ultime de déversement est:

$$M_{Dy} = C_1 \frac{\pi^2 E I_{zz} h_z}{2 l_{Dy}^2} \left(\sqrt{\xi + (\eta C_2)^2} + \frac{GJ}{E I_{zz}} \left(\frac{2 l_k}{\pi h_z}\right)^2 + \eta C_2 \right)$$

$x=1$ pour les sections en I

C_1, C_2 coefficients dépendant des conditions d'appuis et du mode de chargement

h rapport de la distance entre le centre de gravité de la section et le point d'application de la charge, à la demi-hauteur du profilé. Le chargement est supposé être appliqué sur l'axe neutre et donc $h=0$.

4.6 Critère sur la flèche

Les couvertures de toiture ne doivent pas présenter de flèche excessive de manière à ne pas créer de jeu entraînant des pertes d'étanchéité. Le critère sur la flèche ne constitue donc pas un critère de ruine à proprement parler.

Le critère de flèche calculé par ICAB est le suivant:

$$\frac{w}{\left(\frac{l_k}{200}\right)} \leq 1$$

$$w = \sqrt{w_y^2 + w_z^2}$$

$$l_k = \max(L_{KM}, L_{(N1, N2)})$$

La portée l_k est déterminée comme la plus grande des longueurs L_{KM} indiquée par le paramètre LKM des propriétés physiques de la poutre et $L_{(N1, N2)}$ qui est la distance entre l'origine et l'extrémité de la poutre. La flèche w est le déplacement de la poutre perpendiculaire à son axe neutre.

Lorsque le critère de flèche est inférieur à 1, la poutre présente donc une flèche inférieure à 1/200 de la portée.

4.7 Critère étendus CM66 B-D

Avec un matériau dont la norme de référence choisie est « CM66 acier » les critères de ruine étendus sont similaires à ceux présentés ci-dessus.

Le critère de Mises S/F_y est le rapport de la contrainte de Mises sur la limite élastique F_y :

$$S / F_y = \frac{\sigma_{mises}}{F_y}$$

Le critère de flambement simple B est calculé comme F_{cm66}

$$\frac{k_1 \sigma_{N_x} + k_{f_y} \sigma_{f_y} + k_{f_z} \sigma_{f_z}}{\sigma_e} \leq 1$$

Le critère de flambement/déversement D diffère légèrement du calcul D_{cm66}

$$\frac{\sigma_{N_x} k_1 + \sigma_{f_y} k_{f_y} k_{d_y} + \sigma_{f_z} k_{f_z} k_{d_z}}{\sigma_e} \leq 1$$

NB : le coefficient de flambement k_1 est employé pour le calcul D au lieu du coefficient k pour le calcul D_{cm66} .

Critères d'instabilité P22-703 – parois minces en acier

Référence : Document Technique Unifié (DTU) Décembre 1978 AFNOR P22-703

Justification par le calcul de la sécurité des constructions

« Règles de calcul des constructions en éléments à parois minces en acier »

Pour les critères de ruine ICAB P22-703, la notation « B flambement simple » et « D flambement avec déversement » correspondent respectivement à la première et deuxième formule de calcul reportées ci-dessous (cf P22-703 section 6,3):

Critère B :

$$\frac{\sigma + \sigma_{fx} + \sigma_{fy}}{\frac{\sigma_0}{k_v}} \leq 1$$

Critère D :

$$\frac{\sigma + k_d \cdot k_{fx} \cdot \sigma_{fx} + k_{fy} \cdot \sigma_{fy}}{\frac{\sigma_0}{k_v}} \leq 1$$

où l'on désigne par

σ_0	limite élastique de l'acier (MPa=N.mm ⁻²)
σ	la contrainte pondérée de compression simple, égale au quotient de l'effort normal pondéré par l'aire de la section du profil, ou, éventuellement, par l'aire de la section équivalente
σ_f	la valeur maximale de la contrainte pondérée de compression due au moment de flexion
σ_{fx}	correspond à la flexion par rapport à l'axe de plus grande inertie
σ_{fy}	correspond à la flexion par rapport à l'axe de plus petite inertie
k_v	Le coefficient de voilement, déterminé comme indiqué à la section P22-703 5,4 pour l'élément que l'on vérifie. En cas de membrures libres, si $k_m > k_v$ on remplace k_v par k_m

NB : les critères de ruine ICAB correspondent au rapport des contraintes pondérées par la contraintes admissible σ_e/k_v

Le coefficient de flambement par compression est (P22-703 5,2):

$$k = \left(0.5 + 0.554 \frac{\sigma_0 \lambda^2}{\pi^2 E} \right) + \sqrt{\left(0.5 + 0.554 \frac{\sigma_0 \lambda^2}{\pi^2 E} \right)^2 - 0.738 \cdot \frac{\sigma_0 \lambda^2}{\pi^2 E}}$$

Le **coefficient de voilement** k_v est calculé comme suit (P22-703 3,123):

Le voilement n'est pas à craindre et on peut prendre $k_v=1$ tant que l'on a

$$\frac{b_0}{e} \leq \frac{2550}{\sigma_0} \Rightarrow k_v = 1$$

1. Ailes de cornières (ou, d'une façon plus générale, parois planes non raidies reliées par un de leurs bords à une ou plusieurs parois planes non raidies) :

$$k_v = 1 + \frac{88 + \sigma_0}{98100} \left(\frac{b_0}{e} - \frac{2550}{\sigma_0} \right)^2$$

2. Semelles de profilés (ou, d'une façon plus générale, parois planes non raidies reliées par un de leurs bords à une ou plusieurs parois planes non raidies) :

$$k_v = 1 + \frac{88 + \sigma_0}{176600} \left(\frac{b_0}{e} - \frac{2550}{\sigma_0} \right)^2$$

3. Eléments courts, dont le rapport de la longueur l dans la direction de l'effort, à la largeur b_0 satisfait à :

- pour les ailes de cornières :

$$0.5 \leq \frac{l}{b_0} \leq 4.45$$

- pour les semelles de profilés :

$$0.5 \leq \frac{l}{b_0} \leq 1.48$$

$$k_v = 1 + \frac{88 + \sigma_0}{88300 + 194200 \cdot \left(\frac{b_0}{l} \right)^2} \left(\frac{b_0}{e} - \frac{2550}{\sigma_0} \right)^2$$

Le **coefficient de déversement k_d** (P22-703 4,133)

1. profils en I ou U

$$\lambda \leq \frac{1070}{\sqrt{\sigma_0}} \Rightarrow k_d = 1$$

$$\lambda > \frac{1070}{\sqrt{\sigma_0}} \Rightarrow k_d = \left(0.5 - \frac{251100}{\sigma_0 \cdot \lambda^2} \right) \cdot \left(\frac{3188000}{\sigma_0 \cdot \lambda^2} - 0.5 \right) + \frac{\sigma_0 \cdot \lambda^2}{3188000}$$

2 profils en Z

$$\lambda \leq \frac{758}{\sqrt{\sigma_0}} \Rightarrow k_d = 1$$

$$\lambda > \frac{758}{\sqrt{\sigma_0}} \Rightarrow k_d = \left(0.5 - \frac{125600}{\sigma_0 \cdot \lambda^2} \right) \cdot \left(\frac{1594000}{\sigma_0 \cdot \lambda^2} - 0.5 \right) + \frac{\sigma_0 \cdot \lambda^2}{1594000}$$

Critères d'instabilité CB71 – charpentes en bois

Flambement par compression simple CB71

La vérification de la règle CB71 4,932 conduit à vérifier:

$$\frac{K_{CB71} \sigma_{Nx}}{\sigma_{XC}} < 1$$

$$\frac{1}{K_{CB71}} = 1 - 0.8 \left(\frac{\lambda_m}{100} \right)^2, \lambda_m \leq 75$$

$$\frac{1}{K_{CB71}} = 0.55 \left(\frac{75}{\lambda_m} \right)^2, \lambda_m > 75$$

$$\lambda_m = \max(\lambda_y, \lambda_z)$$

Cette vérification est similaire à la règle CM66 pour la compression simple avec un coefficient d'amplification K_{CB71} , la contrainte admissible en compression σ_X . Le coefficient λ est l'élanement, la contrainte admissible en compression est σ_{XC} .

F_cb71, B : Compression et flexion CB71

Pour une poutre soumise à une compression et une flexion entraînant une rotation autour de l'axe y, les règles CB71 (4,953) précisent que la condition de non-flambement est:

$$\sigma_{Nx} < 0 \Rightarrow \frac{K_{CB71} \sigma_{Nx}}{\sigma_{XC}} + \frac{\sigma_{fy} + \sigma_{fz}}{\sigma_{XF}} \leq 1$$

$$\sigma_{Nx} \geq 0 \Rightarrow \frac{\sigma_{Nx}}{\sigma_{XT}} + \frac{\sigma_{fy} + \sigma_{fz}}{\sigma_{XF}} \leq 1$$

selon que la poutre est comprimée ou tendue.

Critères AL76 – constructions en aluminium

Avec un matériau dont la norme de référence choisie est « AL76 aluminium » les critères de ruine étendus correspondent à ceux de la norme AL76 (AFNOR P 22-702. REGLES AL 76 Juillet 1976 « Règles de conception et de calcul des charpentes en alliages d'aluminium »).

Les calculs selon les règles AL76 sont similaires aux règles CM66 (méthode DUTHEIL) mais les courbes de flambement et coefficients de sécurité sont différents.

Le critère de Mises S/F_y est le rapport de la contrainte de Mises sur la limite élastique F_y :

$$S / F_y = \frac{\sigma_{mises}}{F_y}$$

B : Flambement AL76

La vérification de la règle AL76 4,552 conduit à vérifier:

$$\frac{k_1 \sigma_{Nx}}{\sigma_e} < 1$$

$$k_1 = \frac{\mu - \alpha}{\mu - 1}$$

$$\mu = \frac{\sigma_K}{\sigma_{Nx}}, \sigma_K = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Avec

$\alpha = 0.8$ pour les alliages traités thermiquement (c'est l'option par défaut)

$\alpha = 0.17$ pour les alliages non traités thermiquement (option indiquée dans le type de flambement dans les propriétés de section de poutre)

L'élanement λ utilisé pour le calcul de k_1 est le plus grand des élanements (λ_{yy} , λ_{zz}) des deux plans principaux de la sections.

Compression et flexion dans le plan de flambement (AL76 – B flambement)

Pour une poutre soumise à une compression et une flexion entraînant une rotation autour de l'axe y, les règles AL76 (4,6) précisent que pour les poutres à âme pleine, le critère **B flambement** est calculé comme suit :

$$\frac{k_1 \sigma_{Nx} + k_{fy} \sigma_{fy} + k_{fz} \sigma_{fz} + 1.66\tau}{\sigma_e} \leq 1$$

Le coefficient k_{fy} d'amplification des contraintes de flexion est pris pour le cas le plus défavorable qui correspond à un moment constant ou variant linéairement (règle CM66 3,513):

$$k_{fy} = \frac{\mu_y + \alpha_f}{\mu_y - 1}, \mu_y = \frac{\sigma_{ky}}{\sigma_{Nx}}$$

$$\sigma_{ky} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_y}, \lambda_y = \frac{l_{ky}}{\sqrt{\frac{I_{yy}}{A}}}$$

Des relations analogues sont établies pour une compression et un moment de flexion M_z .

Le coefficient α_f dépend de la distribution du moment fléchissant et vaut $\alpha_f = 0.25$ pour un moment variant linéairement.

Le calcul du coefficient « B flambement » inclut également la participation du cisaillement τ .

D : Déversement AL76

le critère **D déversement** est calculé comme suit :

$$\frac{k_1 \sigma_{Nx} + k_{dy} k_{fy} \sigma_{fy} + k_{dz} k_{fz} \sigma_{fz} + 1.66 \tau}{\sigma_e} \leq 1$$

Le coefficient de déversement k_{dy} est défini à partir de l'élancement (règle AL76 4,724) :

$$\lambda_{dy} = K' \sqrt{\frac{W e l_y \cdot l_0}{I_z \left(0.04 \cdot J + \frac{I_w}{l_{dy}^2} \right)}}$$

avec

$K' = 1$, valeur maximale pour placer en sécurité

l_{dy} distance de déversement

l_0 distance entre appui (le calcul est mené avec $l_0 = l_{dy}$)

J module de torsion

I_w module de gauchissement

Un calcul similaire est mené pour λ_{dz} si $I_z > I_y$

Le coefficient de déversement k_d est calculé selon les courbes de flambement 4,55

$$k_{dy} = 0.5 + \frac{0.5 \cdot \sigma_0}{\sigma_K} + \sqrt{\left(0.5 + \frac{0.5 \cdot \sigma_0}{\sigma_K} \right)^2 - \alpha \cdot \frac{\sigma_0}{\sigma_K}}$$

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_{dy}^2}$$

NB : le critère enveloppe « D déversement » est toujours supérieur ou égal à « B flambement ».

Critères Eurocode 3 – partie 1-1

Référence : EN1993-1-1 Octobre 2005 AFNOR P22-311-1

Calcul des structures en acier

Partie 1-1 : Règles générales et règles pour les bâtiments

Pour les critères de ruine ICAB EC3, la notation « B flambement simple » et « D flambement avec déversement » sont évalués en tenant compte respectivement du seul effet de flambement par compression pour « B » ou du flambement et déversement pour « D » selon les procédures reportées ci-après.

Résistance au flambement (EN1993-1-1 6.3.1)

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} \leq 1$$

L'effort de résistance à la compression est :

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi \cdot A_1 \cdot f_y}{\gamma_{M1}}$$

où l'on désigne par

f_y limite élastique de l'acier (MPa=N.mm⁻²)

γ_{M1} Coefficient partiel pour résistance des barres aux instabilités, évaluée par vérification de barres

A_1 Section comprimée

$A_1=A$, aire de la section pour les sections transversales de classes 1, 2 et 3

$A_1=A_{\text{eff}}$, aire de la section pour les sections transversales de classe 4

Le coefficient de réduction pour le mode de flambement approprié :

$$\chi = \frac{1}{\phi^2 + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}}, \chi \leq 1$$

$$\phi = 0.5 \left(1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2 \right)$$

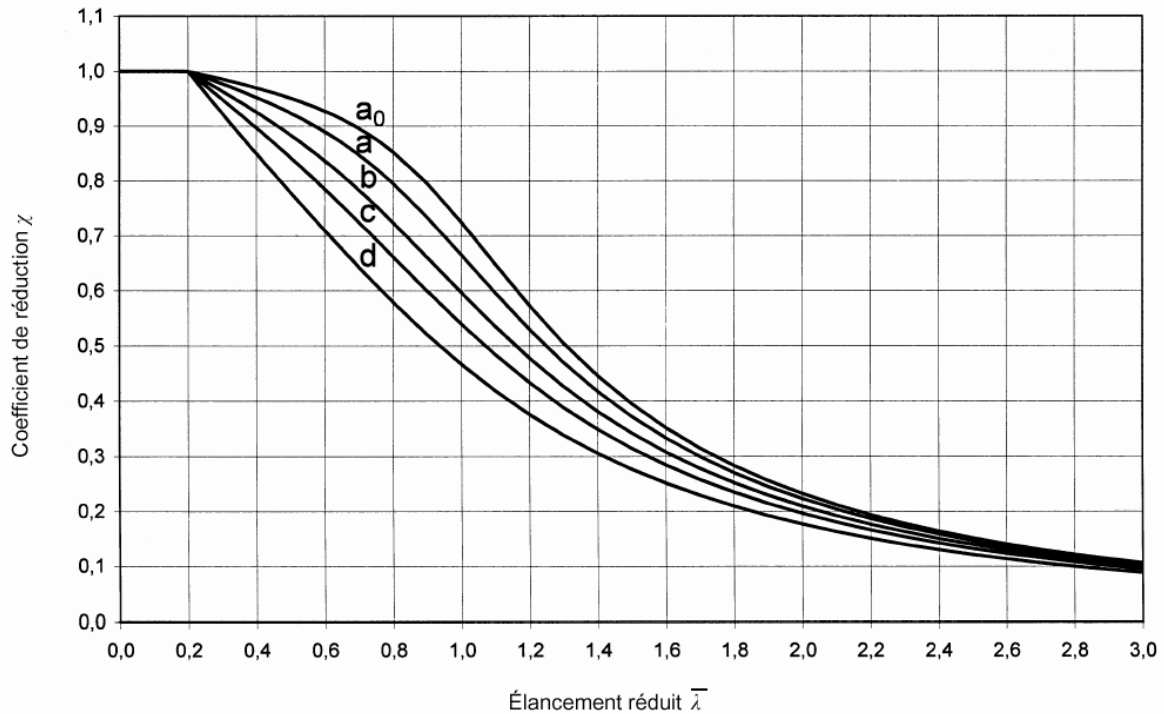
$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A_1 \cdot f_y}{N_{cr}}} = \frac{\lambda}{\lambda_1}$$

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

$$\lambda = \frac{l_k}{r_k}, r_k = \sqrt{\frac{I_k}{A}}$$

Le facteur d'imperfection α prend pour valeur :

Courbe de flambement	a0	a	b	c	d
Facteur d'imperfection α	0.13	0.21	0.34	0.49	0.76



Résistance au déversement (EN1993-1-1 6.3.2)

Il convient de vérifier une barre non maintenue latéralement et soumise à une flexion selon l'axe fort vis-à-vis du déversement de la façon suivante :

$$\frac{M_{Ed}}{M_{b,Rd}} \leq 1$$

Le moment résistant de calcul au déversement est :

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} \cdot W_y \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M1}}$$

où l'on désigne par

W_y Module de résistance approprié pris de la façon suivante :

$W_y = W_{pl,y}$, aire de la section pour les sections transversales de classes 1 ou 2

$W_y = W_{el,y}$, aire de la section pour les sections transversales de classe 3

$W_y = W_{eff,y}$, aire de la section pour les sections transversales de classe 4

Le coefficient de réduction pour le mode de déversement est :

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\phi_{LT}^2 + \sqrt{\phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}}, \chi_{LT} \leq 1$$

$$\phi_{LT} = 0.5 \left(1 + \alpha_{LT} (\bar{\lambda}_{LT} - 0.2) + \bar{\lambda}_{LT}^2 \right)$$

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_y \cdot f_y}{M_{cr}}}$$

Le coefficient d'imperfection χ_{LT} pour le déversement est identique au coefficient χ pour le flambement.

Annexe A: propriétés de sections de poutres homogènes

Les propriétés physiques employées par ICAB Force sont les suivantes:

AR=A	aire de la section de la poutre
IYY=I _{yy}	moment d'inertie
IZZ=I _{zz}	moment d'inertie
TC=J	constante de torsion
SR _Y , SR _Z	coefficients correctifs de rigidité relative au cisaillement transverse
CFI	coût fixe
CVA	coût variable
TK _Y , TK _Z	dimensions de la section Y, Z pour constructions métalliques (ICAB Force/CM)
IV _Y =(I/v) _y	modules de flexion élastique
IV _Z =(I/v) _z	pour contraintes dues aux moments fléchissants
ITC=(J/r)	pour contrainte due au moment de torsion
AR _Y =A _y	aires cisailées
AR _Z =A _z	pour contraintes dues aux efforts tranchants
SP=S _{yy}	moment statique (axe yy)
W _{pl,y} =2.S _{yy}	module de flexion plastique (axe yy)
SPZ=S _{zz}	moment statique (z)
EA=a, t _w	épaisseur de l'âme

Lorsque les coefficients de 1/sr_y et 1/sr_z sont indiqués, il s'agit des coefficients de Reissner (correction des rigidités pour un calcul exact des énergies de déformation). Il est souvent possible d'approcher ces coefficients par sr_y = A/A_y, sr_z = A/A_z, où A_y et A_z sont les aires cisailées équivalentes définies pour une représentation exacte des contraintes maximales de cisaillement transverse.

Section rectangulaire pleine hauteur (h=a), largeur (b)

$$a \geq b, \alpha = \frac{b}{a}, A = ab$$

$$I_{yy} = \frac{ba^3}{12}, \left(\frac{I}{v}\right)_y = \frac{ba^2}{6}, S_{yy} = \frac{ba^2}{8}$$

$$I_{zz} = \frac{ab^3}{12}, \left(\frac{I}{v}\right)_z = \frac{ab^2}{6}, S_{zz} = \frac{ab^2}{8}$$

$$J = \frac{ab^3}{16} \left(\frac{16}{3} - 3.36\alpha \left(1 - \frac{1}{12}\alpha^4 \right) \right), (J/r) = \frac{ab^2}{3(1+0.61\alpha+0.89\alpha^2-1.8\alpha^3+0.91\alpha^4)}$$

$$A_y = A_z = \frac{2}{3}A, \frac{1}{sr_y} = \frac{1}{sr_z} = \frac{5}{6} = \frac{1}{1.2}$$

Section rectangulaire creuse hauteur (h=a), largeur (b), hauteur intérieure (h1=a1), largeur intérieure (b1), faibles épaisseurs

Le coefficient de contrainte K peut être égal à 1 si le rayon de raccordement entre ailes est grand par rapport à l'épaisseur.

$$a \geq b, 2t_w = a - a_l, 2t_f = b - b_l, A = a(b - b_l) + b_l(a - a_l) \approx 2(at_f + bt_w)$$

$$I_{yy} = \frac{ba^3 - b_l a_l^3}{12}, \left(\frac{I}{v}\right)_y = 2 \frac{I_{yy}}{a}, S_{yy} = \frac{ba^2 - b_l a_l^2}{8}$$

$$I_{zz} = \frac{ab^3 - a_l b_l^3}{12}, \left(\frac{I}{v}\right)_z = 2 \frac{I_{zz}}{b}, S_{zz} = \frac{ba^2 - b_l a_l^2}{8}$$

$$A_i = \frac{(a + a_l)(b + b_l)}{4}, J \approx \frac{(t_w + t_f)A_i^2}{a + b}, (J/r) \approx (t_f + t_w) \frac{A_i}{K}$$

$$A_y = (a - a_l) \frac{I_{zz}}{S_{zz}}, A_z = (b - b_l) \frac{I_{yy}}{S_{yy}}$$

$$\left(a = b, t_w = t_f \Rightarrow \frac{A_y}{A} \approx \frac{1}{2}, \frac{1}{sr_y} = \frac{1}{sr_z} = \frac{1}{2.4}\right)$$

Section circulaire creuse rayon extérieur (r_0), rayon intérieur (r_i), formules applicables à une section pleine ($r_i=0$).

$$r_0 > r_i, A = \pi(r_0^2 - r_i^2)$$

$$I_{yy} = I_{zz} = \frac{\pi}{4}(r_0^4 - r_i^4), \left(\frac{I}{v}\right) = \frac{\pi(r_0^4 - r_i^4)}{4r_0}, S = \frac{2}{3}(r_0^3 - r_i^3)$$

$$J = \frac{\pi}{2}(r_0^4 - r_i^4), (J/r) = \frac{\pi(r_0^4 - r_i^4)}{2r_0}$$

$$A_y = A_z = \frac{3\pi}{4} \frac{(r_0 - r_i)(r_0^4 - r_i^4)}{r_0^3 - r_i^3}, \frac{1}{sr_y} = \frac{1}{sr_z} = \frac{6}{7 + 20\mu^2}, \mu = \frac{r_0 r_i}{r_0^2 + r_i^2}$$

$$\left(r_i = 0 \Rightarrow \frac{1}{sr} = \frac{6}{7}, \frac{A_y}{A} = \frac{3}{4}, r_i \approx r_0 \Rightarrow \frac{1}{sr} \approx \frac{1}{2}, \frac{A_y}{A} \approx \frac{1}{2}\right)$$

Section elliptique pleine demi grand-axe (a), demi petit-axe (b).

$$a > b, A = \pi ab$$

$$I_{yy} = \frac{\pi}{4} b a^3, \left(\frac{I}{v}\right)_y = \frac{\pi}{4} b a^2, S_{yy} = \frac{2}{3} b a^2$$

$$I_{zz} = \frac{\pi}{4} a b^3, \left(\frac{I}{v}\right)_z = \frac{\pi}{4} a b^2, S_{zz} = \frac{2}{3} a b^2$$

$$J = \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}, (J/r) = \frac{\pi}{2} a b^2$$

$$\frac{A_y}{A} = \frac{A_z}{A} = \frac{3}{4}, \frac{1}{sr_z} = \frac{12(3a^2 + b^2)}{40a^2 + 16b^2}$$

Section pleine formant un triangle équilatéral coté (a), axe y parallèle à la base.

$$A = \frac{a^2}{2}$$

$$I_{yy} = \frac{a^4}{36}, \left(\frac{I}{v}\right)_y = \frac{a^3}{24}, S_{yy} = \frac{4}{81} a^3$$

$$J = a^4 \frac{\sqrt{3}}{80}, (J/r) = \frac{a^3}{20}$$

$$\frac{A_y}{A} = \frac{3}{8}$$

Section en I, H: hauteur (h), largeur (b), épaisseur de l'âme ($a=t_w$), épaisseur des ailettes ($e=t_f$), rayon de raccordement entre l'âme et les ailettes (r), hauteur de l'âme ($h_1=d$). Les formules sur les coefficients relatifs à la torsion sont extraites de l'ouvrage de Timoshenko (Tome 2, p. 248, 296). Pour les profils laminés en I avec rayon de raccordement, le moment de torsion J peut être multiplié par 1.25 (CM66 13,601).

$$A = a h_1 + 2 e b$$

$$I_{yy} \approx \frac{a h h_1^2}{12} + \frac{b(h^3 - h_1(h - e)^2)}{12}, \quad \left(\frac{I}{v}\right)_y = 2 \frac{I_{yy}}{h}, \quad S_{yy} \approx \frac{a h_1^2}{8} + \frac{b(h^2 - (h - e)^2)}{4}$$

$$I_{zz} \approx \frac{h_1 a^3}{12} + \frac{e b^3}{6}, \quad \left(\frac{I}{v}\right)_z = 2 \frac{I_{zz}}{b}, \quad S_{zz} \approx \frac{h_1 a^2}{8} + \frac{e b^2}{4}$$

$$J \approx \frac{h a^3 + 2 b e^3}{3}, \quad (J / r) \approx \frac{h a^3 + 2 b e^3}{3 e K}, \quad K = 1.743 \sqrt{\frac{e}{r}}$$

$$A_z = \frac{a I_{yy}}{S_{yy}} \approx a h, \quad A_y = \frac{2 e I_{zz}}{S_{zz}} \approx \frac{4}{3} e b$$

$$\left(b = h, e = a \Rightarrow \frac{1}{sr_z} = \frac{1}{3.12}, \frac{1}{sr_y} = \frac{1}{1.45} \right)$$

NB. Les formules à employer pour les poutrelles IPE, H normalisées sont (cf catalogue OTUA):

$$d = h - 2(t_f + t)$$

$$A = h t_w + 2(b - t_w)t_f + 4r^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$I_{yy} = \frac{h^3 t_w}{12} + \frac{(b - t_w)t_f(h - t_f)^2}{2} + \frac{t_f^3(b - t_w)}{6} + r^2(4 - \pi) \left(\frac{h}{2} - t_f - r \left(1 - \frac{2}{12 - 3\pi}\right)\right)^2 + 4r^4 \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16} - \frac{1}{9(4 - \pi)}\right)$$

$$I_{zz} = \frac{h t_w^3}{12} + \frac{(b - t_w)t_f(b + t_w)^2}{8} + \frac{t_f(b - t_w)^3}{24} + r^2(4 - \pi) \left(\frac{t_w}{2} + r \left(1 - \frac{2}{12 - 3\pi}\right)\right)^2 + 4r^4 \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16} - \frac{1}{9(4 - \pi)}\right)$$

$$W_{el,y} = \left(\frac{I}{v}\right)_y = \frac{I_{yy}}{h/2}, \quad W_{el,z} = \left(\frac{I}{v}\right)_z = \frac{I_{zz}}{b/2},$$

$$A_{v,y} = A_y = 2b t_f + (t_w + r)t_w, \quad A_{v,z} = A_z = A - 2b t_f + (t_w + 2r)t_f$$

$$W_{pl,y} = 2 S_{yy} = \frac{t_w h^2}{4} + (b - t_w)(h - t_f)t_f + \frac{4 - \pi}{2} r^2 (h - 2t_f) + \frac{3\pi - 10}{3} r^3$$

$$W_{pl,z} = 2 S_{zz} = \frac{b^2 t_f}{2} + \frac{h - 2t_f}{4} t_w^2 + r^3 \left(\frac{10}{3} - \pi\right) + \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) t_w r^2$$

$$I_t = J = \frac{2b t_f^3}{3} \left(1 - 0.63 \frac{t_f}{b} \left(1 - \frac{t_f^4}{12b^4}\right)\right) + (h - 2t_f) \frac{t_w^3}{3}$$

$$+ 2 \left(0.1 \frac{r}{t_f} + 0.15\right) \frac{t_w}{t_f} \left(\frac{(t_f + r)^2 + t_w \left(r + \frac{t_w}{4}\right)}{2r + t_f}\right)^4$$

$$I_w = \frac{t_f b^3}{24} (h - t_f)^2$$

Section en U: hauteur (h), largeur (b), épaisseur de l'âme ($a=t_w$), épaisseur des ailettes ($e=t_f$), rayon de raccordement entre l'âme et les ailettes (r), hauteur de l'âme (h_1). Pour les profils laminés en U avec rayon de raccordement, le moment de torsion J peut être multiplié par 1.1 (CM66 13,601).

$$A = ah_1 + 2eb, \quad y_0 = \frac{ha^2 + 2e(b^2 - a^2)}{2ha + 4e(b - a)}$$

$$I_{yy} \approx h_1 \frac{(a - y_0)^3 + y_0^3}{3} + 2e \frac{(b - y_0)^3 + y_0^3}{3}, \quad \left(\frac{I}{v}\right)_y = 2 \frac{I_{yy}}{h}, \quad S_{yy} \approx \frac{ah_1^2}{8} + b \frac{h^2 - h_1(h - e)}{8}$$

$$I_{zz} \approx \frac{ah_1^3}{12} + b \frac{h^3 - h_1(h - e)^2}{12}, \quad \left(\frac{I}{v}\right)_z = \min\left(\frac{I_{zz}}{b - y_0}, \frac{I_{zz}}{y_0}\right), \quad S_{zz} \approx e(b - y_0)^2$$

$$J \approx \frac{ha^3 + 2be^3}{3}, \quad (J/r) \approx \frac{ha^3 + 2be^3}{3eK}, \quad K = 1.743 \sqrt{\frac{e}{r}}$$

$$A_z = \frac{a I_{yy}}{S_{yy}}, \quad A_y \approx \frac{2e I_{zz}}{S_{zz}}$$

Section en T: hauteur (h), largeur (b), épaisseur de l'âme ($a=t_w$), épaisseur de la base ($e=t_f$), rayon de raccordement entre l'âme et les ailettes (r).

$$A = a(h - e) + eb, \quad z_0 = \frac{be^2 + a(h^2 - e^2)}{2be + 2a(h - e)}$$

$$I_{yy} \approx b \frac{(e - z_0)^3 + z_0^3}{3} + a \frac{(h - z_0)^3 - (e - z_0)^3}{3}$$

$$\left(\frac{I}{v}\right)_y = \min\left(\frac{I_{yy}}{h - z_0}, \frac{I_{yy}}{z_0}\right), \quad S_{yy} \approx \frac{a}{2}(h - z_0)^2$$

$$I_{zz} \approx (h - e) \frac{a^3}{12} + \frac{eb^3}{12}, \quad \left(\frac{I}{v}\right)_z = 2 \frac{I_{zz}}{b}, \quad S_{zz} \approx (h - e) \frac{a^2}{8} + \frac{eb^2}{8}$$

$$J \approx \frac{ha^3 + be^3}{3}, \quad (J/r) \approx \frac{ha^3 + be^3}{3e}$$

$$A_z = \frac{a I_{yy}}{S_{yy}}, \quad A_y \approx \frac{e I_{zz}}{S_{zz}}$$

Section en cornière: hauteur (h), largeur (b), épaisseur de l'âme (a=t_w), épaisseur de la base (e=t_f), rayon de raccordement entre l'âme et les ailettes (r).

$$A \approx ah + eb, \quad y_0 \approx \frac{ha^2 + e(b^2 - a^2)}{2ha + 2e(b - a)}, \quad z_0 \approx \frac{be^2 + a(h^2 - e^2)}{2be + 2a(h - e)}$$

$$I_{YY} \approx b \frac{(e - z_0)^3 + z_0^3}{3} + a \frac{(h - z_0)^3 - (e - z_0)^3}{3}, \quad I_{ZZ} \approx h \frac{(a - y_0)^3 + y_0^3}{3} + e \frac{(b - y_0)^3 - (a - y_0)^3}{3}$$

$$I_{YZ} \approx \frac{(b - y_0)^2 - y_0^2}{2} \cdot \frac{(e - z_0)^2 - z_0^2}{2} + \frac{(a - y_0)^2 - y_0^2}{2} \cdot \frac{(b - z_0)^2 - (e - z_0)^2}{2}$$

$$I_{uu} = \frac{I_{YY} + I_{ZZ}}{2} + \frac{\sqrt{(I_{YY} - I_{ZZ})^2 + 4I_{YZ}^2}}{2}, \quad I_{vv} = \frac{I_{YY} + I_{ZZ}}{2} - \frac{\sqrt{(I_{YY} - I_{ZZ})^2 + 4I_{YZ}^2}}{2}$$

$$J \approx \frac{ha^3 + be^3}{3}, \quad (J/r) \approx \frac{ha^3 + be^3}{3e}$$

$$h = b, \quad a = e \Rightarrow S_{uu} \approx e \frac{h^2}{2\sqrt{2}}, \quad S_{vv} \approx e \frac{h^2 - y_0^2}{2\sqrt{2}}$$

$$\left(\frac{I}{v}\right)_v = \frac{I_{vv}}{\sqrt{y_0^2 + z_0^2}}, \quad \left(\frac{I}{v}\right)_u = \frac{I_{uu}}{\sqrt{y_0^2 + (h - z_0)^2}}$$

$$A_v \approx \frac{(a + e)I_{uu}}{S_{uu}\sqrt{2}}, \quad A_u \approx \frac{\sqrt{2}(a + e)I_{vv}}{S_{vv}}, \quad (h = b)$$

Annexe B: analyse modale, fréquences propres, flambement

La version dynamique ICAB Force permet le calcul des fréquences f_i et vecteurs propres $\{V_i\}$ d'une structure, à savoir la détermination des couples $(f_i, \{V_i\})$, tels que:

$$\begin{aligned}
 [K]\{V_i\} &= \omega_i^2 [M]\{V_i\} \\
 \omega_i &= 2\pi f_i \\
 \{V_i\}^T [K]\{V_i\} &= k_i \\
 \{V_i\}^T [M]\{V_i\} &= m_i \\
 [V] &= [\{V_1\}, \{V_2\}, \dots, \{V_n\}] \\
 \frac{k_i}{m_i} &= \omega_i^2
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Les vecteurs propres $\{V_i\}$ diagonalisent les matrices symétriques de rigidités $[K]$ et masses $[M]$ de la structure et réduisent ces matrices en rigidités modales k_i et masses modales m_i . Les rapports k_i/m_i sont les carrés des pulsations propres ω_i . Une structure discrétisée par la méthode des éléments finis comprend autant de modes propres que de degrés de liberté. En pratique, il n'est utile de connaître que les premiers modes (basses fréquences). L'analyse modale pour déterminer les modes de flambement utilise le même algorithme à partir des matrices $[K]$ rigidité et $[Kd]$ rigidité différentielle formées à partir des précontraintes: $[K].\{V_i\} = l_i[Kd].\{V_i\}$. Les coefficients l_i sont les coefficients d'amplification des charges pour provoquer un flambement selon le mode $\{V_i\}$.

$$\begin{aligned}
 m_{ij} &= \{V_j\}^T [M] \{V_i\} \\
 R_i &= \frac{\sum_j m_{ij}}{m_{ii}} - 1
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

Les résidus nuls traduisent l'orthogonalité des vecteurs propres par rapport à la matrice $[M]$, c'est-à-dire que les termes de couplages m_{ij} doivent être nuls, hormis les termes diagonaux m_{ii} sont les masses modales.

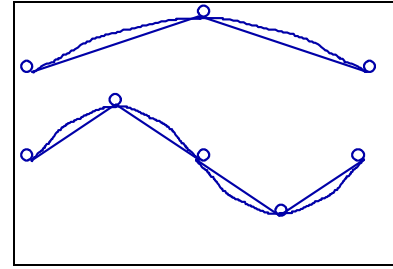
Extraction modale

ICAB Force évalue les fréquences et modes propres par la méthode de Ritz qui est un algorithme itératif qui fournit les N premiers modes d'une structure. Cette méthode ne converge pas toujours et dans ce cas il suffit de modifier le nombre de modes désirés. Toutefois, l'extraction des modes est impossible si une partie de la structure est sans masse; il faut donc vérifier soigneusement que tous les matériaux employés ont une densité non nulle. Il faut veiller aussi à ce que les sections et les inerties des poutres soient définies. L'algorithme d'extraction des modes ne fournit qu'une approximation des vecteurs propres. Les critères de convergence de l'algorithme est caractérisé par des résidus $R_i \gg 0$ définis pour chaque mode V_i :

Erreur d'approximation

La déformée statique d'une poutre calculée par ICAB correspond au calcul analytique exact. En revanche, le calcul dynamique est approché par rapport au calcul exact selon la théorie des milieux continus. L'erreur sur les fréquences propres sera d'autant plus faible que la poutre sera modélisée par un grand nombre de d'éléments.

En pratique, il faut garder à l'esprit qu'un mode propre ne peut être correctement calculé que si sa déformée "épouse" la structure. Par exemple, une déformée de poutre présentant un arc de courbure doit être portée par deux éléments pour que l'erreur sur la fréquence propre soit de l'ordre de 1%. Ainsi, pour une poutre posée sur appuis articulés, les erreurs sur les fréquences propres pour les deux premiers modes de flexion sont:



nombre d'éléments	erreur sur la fréquence du 1er mode en flexion	erreur sur la fréquence du 2ème mode en flexion
1	+17%	+45%
2	+1%	+34%
3	+0.4%	+3.7%
4	+0.15%	+1.6%

Déformée modale

Attention: si $\{V_i\}$ est vecteur propre, $2\{V_i\}$ est aussi vecteur propre. Un vecteur propre n'est donc pas défini de manière unique puisqu'il peut être multiplié par n'importe quel coefficient d'amplification. La déformée modale obtenue à partir d'un vecteur $\{V_i\}$ peut être visualisée avec n'importe quel coefficient d'amplification.

Amortissement

Lorsque la structure est sollicitée à une fréquence proche d'une fréquence de résonance, l'amplification des déplacements n'est limitée que par l'amortissement. Si les fréquences propres sont éloignées de plus de 2 fois de leur bande passante, on peut modéliser l'amortissement de la structure par un amortissement visqueux diagonalisable par les vecteurs propres $[V]$. Le comportement de la structure est caractérisé de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
 [M] \frac{\partial^2 \{X\}}{\partial t^2} + [C] \frac{\partial \{X\}}{\partial t} + [K] \{X\} &= \{F\} \\
 \{X\} &= [V] \{x\}, \{f\} = [V]^T \{F\} \\
 [m] &= [V]^T [M] [V], [c] = [V]^T [C] [V], [k] = [V]^T [K] [V] \\
 m_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} + c_i \frac{\partial x_i}{\partial t} + k_i x_i &= f_i - \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} + 2 \xi_i \omega_i \frac{\partial x_i}{\partial t} + \omega_i^2 x_i = \frac{f_i}{m_i} \\
 2 \xi_i \omega_i &= \frac{c_i}{m_i}, \omega_i^2 = (2\pi f_i)^2 = \frac{k_i}{m_i}
 \end{aligned} \tag{21}$$

Les coefficients ξ_i sont les amortissements réduits et sont généralement de l'ordre de quelques pour-cents pour des structures sans jeu. La matrice des vecteurs propres $[V]$ permet de définir les amplitudes modales $\{x\}$ et les moments modaux $\{f\}$ à partir des déplacements $\{X\}$ et forces $\{F\}$.

La réponse libre après une excitation du mode i est de la forme:

$$x_i(t) = A e^{-\xi_i \omega_i t} \cos\left(\omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} t + \varphi\right), \xi_i < 1 \tag{22}$$

Le temps $1/(\xi_i \omega_i)$ caractérise la durée d'amortissement du mode i lors d'un retour à l'équilibre.

Pour une excitation sinusoïdale forcée du mode i à la pulsation $\omega=2\pi f$ de la forme $k_i A \cdot \cos(\omega t)$, le gain dynamique est défini comme l'amplification du déplacement d'amplitude A :

$$G(\omega) = \frac{k_i x(\omega)}{m_i x_i(\omega)} = \frac{\omega_i^2}{\omega_i^2 - \omega^2 + j2\xi_i \omega_i \omega}$$

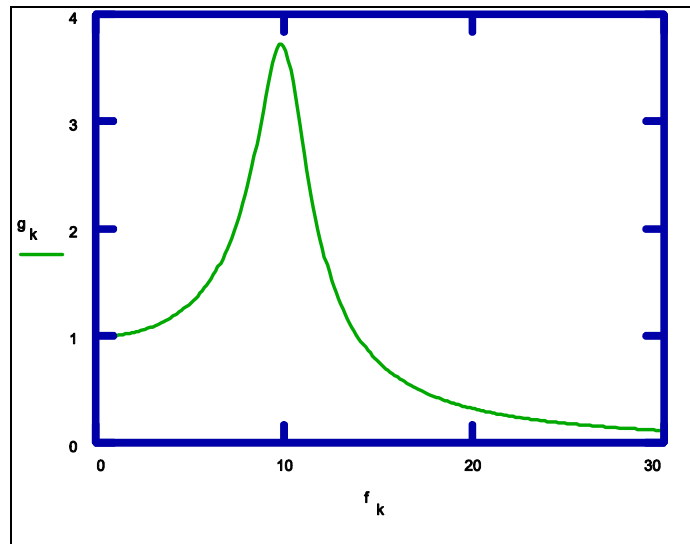
$$|G(\omega_{\max})| = \frac{1}{2\xi_i \sqrt{1-\xi_i^2}}, \quad \omega_{\max} = \omega_i \sqrt{1-2\xi_i^2}$$

$$\omega = \omega_i \pm \xi_i \omega_i - |G(\omega)| > \frac{|G(\omega_{\max})|}{\sqrt{2}} \quad (23)$$

Aux fréquences proches de f_i sur une largeur de $2\xi_i f_i$ dite largeur de bande passante, le gain dynamique est proche de $1/(2\xi_i)$.

Aux fréquences inférieures à la fréquence de résonance f_i , le gain est proche de 1; la réponse dynamique est sensiblement identique à la déformée statique.

Aux fréquences supérieures à f_i , la réponse du modale est très inférieure à 1 et diminue comme l'inverse du carré de la fréquence f .



INDEX

Additif 80	28
Axe neutre	15
Cisaillement	20
Cisaillement transverse	11
contrainte de cisaillement	12
Contrainte de torsion	13
Contraintes maximales	19
Cornière	40, 41
Déformations	7
Déversement	24
règlement CM66	26
Dilatations thermiques	18
Efforts résultants	8
Equations d'équilibre	9
Facteurs de correction pour cisaillement	11
Flambement	23, 24
compression et flexion	25, 32
compression simple CM66	25
formule enveloppe CM66	27
longueur	24
Flambement CB71	32
Flèche	29
portée	29
fréquence propre	42
Hypothèse	
contraintes planes	8
sections droites	7
Kirchhoff	12
longueur de flambement	23
Longueur minimale de flambement LKM	24
Mises	21
modos propres	42
Précontraintes	17
Profils variables	14
Propriétés physiques de poutres	14
Repère principal	15
Rigidités d'une poutre	10
Timoshenko	12
Traction/compression	20
Tsai-Wu	21
Voilement	27

Adresses:

- AFNOR, tour Europe, 92049 Paris La Défense cedex 7.
- CTICM, Centre Technique Industriel de la Construction Métallique, Domaine de St-Paul, BP1, 78470 Saint Rémy lès Chevreuse
- CSTB, Centre Scientifique et Technique du Bâtiment, 4 av. du recteur Poincaré, 75016 Paris.
CSTB publications, BP2, 77421 Marne la Vallée cedex 2.
- Editions EYROLLES, 61 bd St Germain, 75240 Paris cedex 05.
- Editions HERMES, 14 rue Lantiez, 75017 Paris.
- OTUA, Office Technique pour l'Utilisation de l'acier. 92070 Puteau La Défense cedex 33.
- UNFCMP, Union Nationale française de Charpente Menuiserie Parquet, 10 rue du débarcadère, 75017 Paris.

Ouvrages de référence:

- "Règles de calcul des Constructions en Acier" Règles CM66. Editions Eyrolles. DTU P22-701
- "Règles de calcul et de conception des Charpentes en Bois" Règles CB71 (juin 1984). Editions Eyrolles 1991. DTU P21-701
- "Règles définissant les effets de la neige et du vent sur les constructions." Règles NV65, N84. Editions Eyrolles. DTU P06-002, P06-006
- "Eurocode 2, Calcul des structures en béton" P18-711. AFNOR.
- "Eurocode 3, Calcul des structures en acier" P22-311. AFNOR.
- "Guide de validation des progiciels de calcul de structures". AFNOR 1990.
- "Résistance des matériaux", Tomes 1 et 2. S.P. TIMOSHENKO. Dunod (1ère édition 1949).
- « Formulaire de la construction métallique » Pierre MAITRE. Le Moniteur 1997
- « mémotech - structures métalliques », C. HAZARD, F. LELONG, B. QUINZAIN. Editions CASTEILLA 1997
- "Conception et calcul des structures", Jean MOREL, Eyrolles 1990.
- « guide calcul - structures métalliques » Jean MOREL. Eyrolles 1997
- "Modélisation des structures par éléments finis", Tome 2. J.L. BATOZ & G. DHATT. Hermès 1990.
- "Analyse des structures par Eléments Finis", IMBERT J.F., Cépadues Editions (Toulouse) 1984.
- "Numerical Methods in Finite Element Analysis", BATHE K.J. & WILSON E.L. Prentice Hall, 1976.
- Normalisation AFNOR:
 - A 35-502 (EN 10155) "aciers de construction"
 - A 45-003 juil. 1979 (ronds)
 - A 45-004 juil. 1979 (carrés)
 - A 45-005 nov. 80 (plats)

- A 45-009, 45-010 juil 1979 (cornières)
- A 45-209 sept. 1983 (IPN)
- A 45-205 sept. 1983 (IPE)
- A 45-201 sept. 1983 (HE A, B, C, M)
- A 45-202 déc. 1986 (UPN, UPS)
- A 45-255 nov. 1983 (UAP)
- B51 001, 51 002 (caractéristiques du bois)

- Catalogue "Produits sidérurgiques" 15001. OTUA.
- « profils creux pour construction et tubes pour métallerie » 15.018 OTUA